

Geschiedenis van de wiskunde

Johan Deprez, VELOV-leergemeenschap wiskunde, Diest, 3/7/26
slides komen online op mijn website (www.johandeprez.be)

Kennismaking

- sinds 1/10/24 emeritus 'met opdracht'
- 30 jaar docent wiskunde (basiswiskunde in economische en biomedische opleidingen)
- 30 jaar praktijkassistent en docent vakdidactiek wiskunde (UAntwerpen, KU Leuven)
- redactielid van Uitwiskeling
- pas (relatief) recent betrokken bij geschiedenis van de wiskunde, geen specialist op dit terrein

ik geef nu voor de vijfde keer Geschiedenis van de wiskunde, keuzevak in de master wiskunde en in de educatieve master

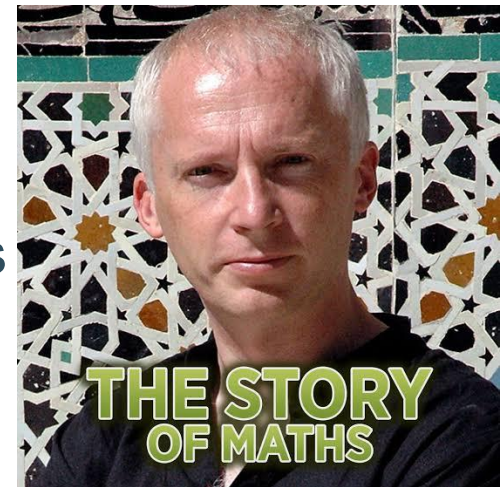
Vóór we van start gaan...

- er valt veel meer te vertellen over geschiedenis van de wiskunde dan wat er past in een lezing van een uur
- daarom: enkele goede bronnen waar je (veel) meer kunt vinden
 - boek *Wortels van de wiskunde*. Een historisch overzicht voor leraren en anderen
(<https://www.epsilon-uitgaven.nl/>)
 - bijbehorende reeks artikelen in het tijdschrift *Euclides*
(http://www.jeaninedaems.nl/wp-content/uploads/2014/08/Euclides_serie_Wortels-van-de-Wiskunde.pdf)
 - een aantal Zebraboekjes
(<https://www.epsilon-uitgaven.nl/>)



Vóór we van start gaan...

- ...
- daarom: enkele goede bronnen waar je (veel) meer kunt vinden
 - Negen fragmenten uit de geschiedenis van de wiskunde, Uitwiskeling 39/3
 - en nog veel andere bijdragen in dit tijdschrift en in Wiskunde en Onderwijs
(<https://www.uitwiskeling.be/> en <https://www.vvwl.be>)
 - The story of math (reeks van vier documentaires door Marcus du Sautoy)
 - en nog zoveel andere bronnen...



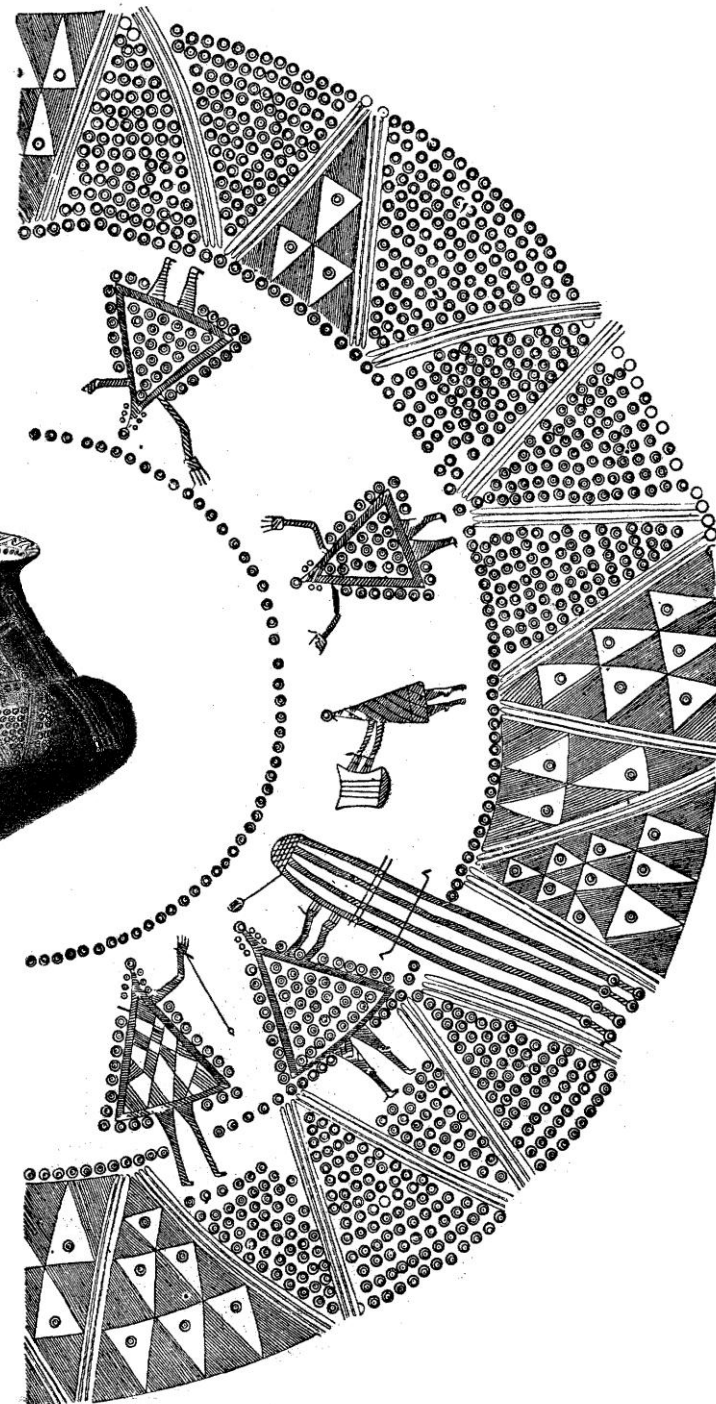
Inhoud van deze lezing

- Niet: een kort overzicht van de geschiedenis van de wiskunde
- Niet: resultaten van eigen onderzoek
- Enkele voorbeelden
- (Bijna uitsluitend) uit de meetkunde
- Klassiekers maar ook minder bekend materiaal
- ‘Oude’ voorbeelden
- Wat context over de oude beschavingen waaruit deze voorbeelden stammen
- Bruikbaar in de klas?
- Tussendoor wat commentaar over het gebruik van geschiedenis van de wiskunde in wiskundelessen

Een prehistorisch voorbeeld

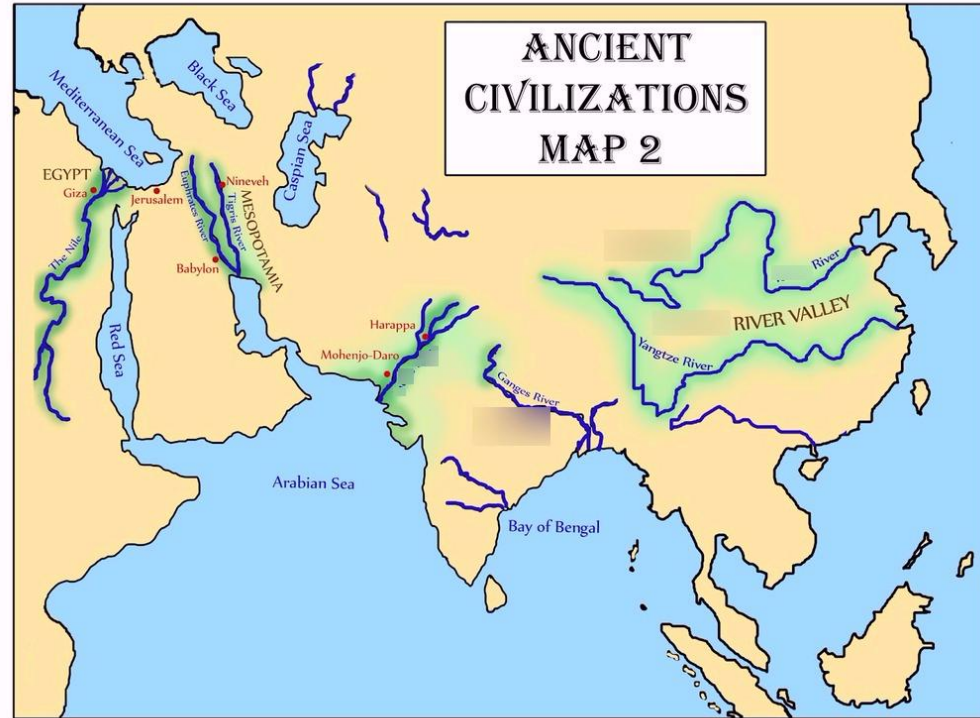
Metalen pot uit Ödenburg, Hongarije

- bron: Lietzmann, W. "Geometrie Und Prähistorie." Isis, vol. 20, no. 2, 1934, pp. 436–439.
- uit Hallstatt-tijd (1000-500 BC)
- zie bv. de onderverdeling in congruente driehoeken: gelukt voor verdeling in 9 en 16, niet voor 25
- meetkundige elementen vind je ook terug op aardewerk, kleren en doeken, vlechtwerk voor manden, ...
- wiskunde zonder nuttigheids-waarde



Vier grote oude beschavingen

- ontstaan van irrigatie-economieën langs de oevers van grote rivieren
 - Mesopotamië: Tigris en Eufraat
 - Egypte: Nijl
 - China: Hoang-ho (Gele Rivier, noorden) en Yangtse (Lange Rivier, zuiden)
 - India: Indus (westen) en Ganges (oosten)
- wat?



grotere bevolkingsconcentraties: steden / handel, complexere bestuursvormen / ontstaan van een hogere klasse / vaak verweven met godsdienst / nood aan organisatie en administratie / ontstaan van schrift en wiskunde / schrijven en rekenen door een beperkte groep

Een oud voorbeeld uit Mesopotamië

Een 'oud' voorbeeld uit Mesopotamië

- bron: Robson, E. (2009). Mesopotamian Mathematics. in: Katz, V., The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook. Princeton and Oxford: Princeton University Press
- kleitablet W 19408.76
- Uruk, 3200 BC (Mesopotamië, niet Babylon!)
- tempel van Inana
- tablet hergebruikt in heropbouw van de tempel
- kleitablet bevat berekening van de oppervlakte van twee velden

tempel bezat veel gronden voor landbouw en veeteelt



veld 1 – twee
'breedtes' en
twee 'lengtes'

Obverse

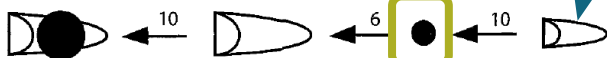
—	600 60 60 10 10
600	60 60 10
600	60
600	600 60 60 10 10
600 —	60 60 10

Reverse

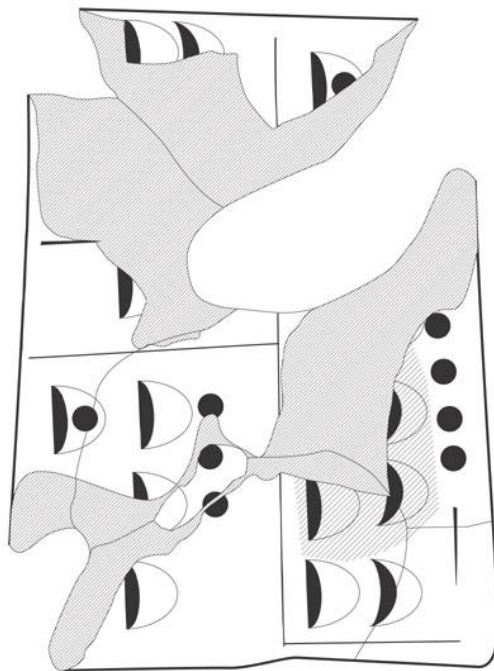
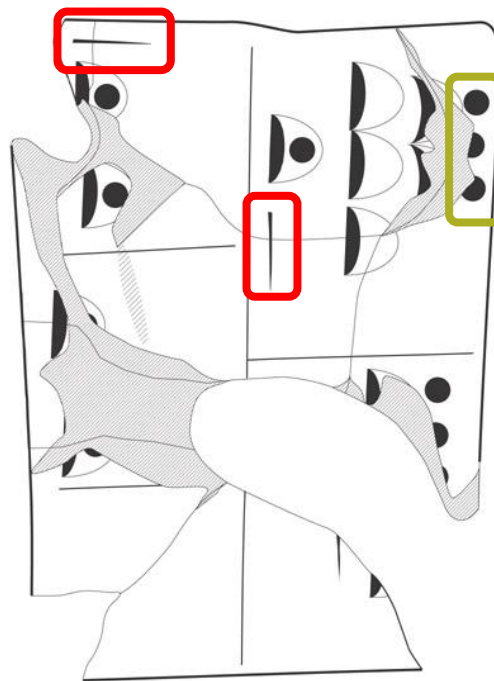
600 60 60	600 60
60 60	600 10 10
— 60 10 10	
60	
600 60 10 10	60 60 10 10
600 60 10 10	60 60 10 10
— 60	60 60
	60 60

hier nog geen
positietalstelsel!

1 rod



Length units: $\approx$ 3.6 km $\approx$ 360 m $\approx$ 60 m $\approx$ 6 m



Een 'oud' voorbeeld

—	600 60 60 10 10
600	60 60 10
600	60
600	600 60 60 10 10
600 —	60 60 10

$$\begin{aligned}
 & \{(2 \times 600) + (2 \times 600)\} / 2 \times \\
 & \{(600 + 5 \times 60 + 3 \times 10) + (600 + 4 \times 60 + 3 \times 10)\} / 2 \\
 & = (1200 + 1200) / 2 \times (930 + 870) / 2 \\
 & = 1200 \times 900 \text{ (rods)} = 1,080,000 \text{ (area sar)} \\
 & = 600 \text{ (area bur)}
 \end{aligned}$$

- berekening van de oppervlakte
- via (benaderende?) formule ('agrimensor's method' = landmetermethode)

$$A = (l_1 + l_2)(b_1 + b_2) / 4$$

- praktische wiskunde!
- maar toch wat kunstmatig (bv. ronde uitkomst): gebruikt voor scholing

anders dan de meeste kleitabletten (registratie transacties, bezittingen, ...)

Terugblik

- dragers zijn kleitabletten: (relatief) goed bewaard gebleven, dus (relatief) veel bronnenmateriaal
- kleitabletten bevatten (o.a.) voorbeeldproblemen met hun oplossingsmethode
 - bedoeld om een algemene oplossingsmethode te tonen
 - ook al wordt ze niet in het algemeen geformuleerd
 - geen verklaring waarom de oplossingsmethode werkt (maar wellicht was zo'n verklaring wel bekend)
- praktische wiskunde: het 'echte' werk (allerhande administratie) maar ook voor scholing van scribenten
- dat er in de geschiedenis voor eenvoudige zaken als oppervlakte van een vierhoek aanvankelijk 'verkeerde' formules gebruikt werden, laat zien dat de huidige kennis niet in één-twee-drie ontstaan is

Twée soorten wiskunde bij de Oude Grieken

Context



- andere context dan Mesopotamië en Egypte: relatief kleine stadstaten en handelskolonies langs de kusten
- dit hangt samen met een andere cultuur
- recenter: 8ste eeuw voor Christus tot 5de eeuw na Christus

Ook hier praktische wiskunde ...

- tunnel van Eupalinus
- ong. 550-530 BC
- deel van watertoevoer-systeem voor de stad Samos (eiland voor de Ionische kust)
- over een lengte van ong. 1 km onder een heuvel
- twee teams van werklieden groeven de tunnel vanuit de twee uiteinden
- op te lossen problemen: beide uiteinden op gepaste hoogte, elkaar ontmoeten in het midden, ...

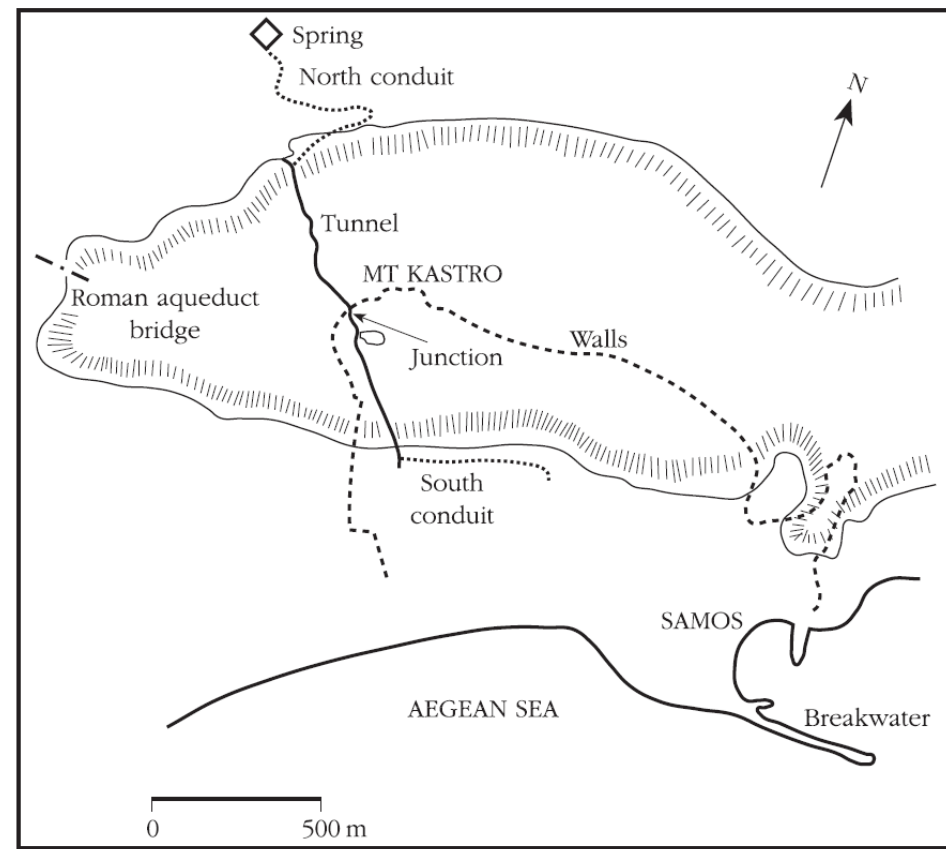


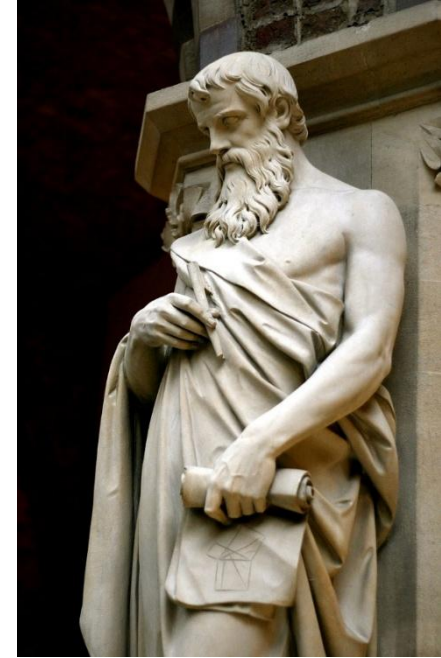
Figure 1.2 The Eupalinus tunnel
(reproduced with permission from Rihll and Tucker (1995), p. 406, fig. 18.2)

Maar natuurlijk ook een heel andere wiskunde

- beter bekend onder wiskundigen
- geassocieerd met Plato (en Aristoteles)
- beschrijven van een perfecte ideeënwereld
- theoretisch, algemeen, abstract, zuiver, aandacht voor de grondslagen, ...
- accent op argumenteren en redeneren vanuit een beperkt aantal aannames

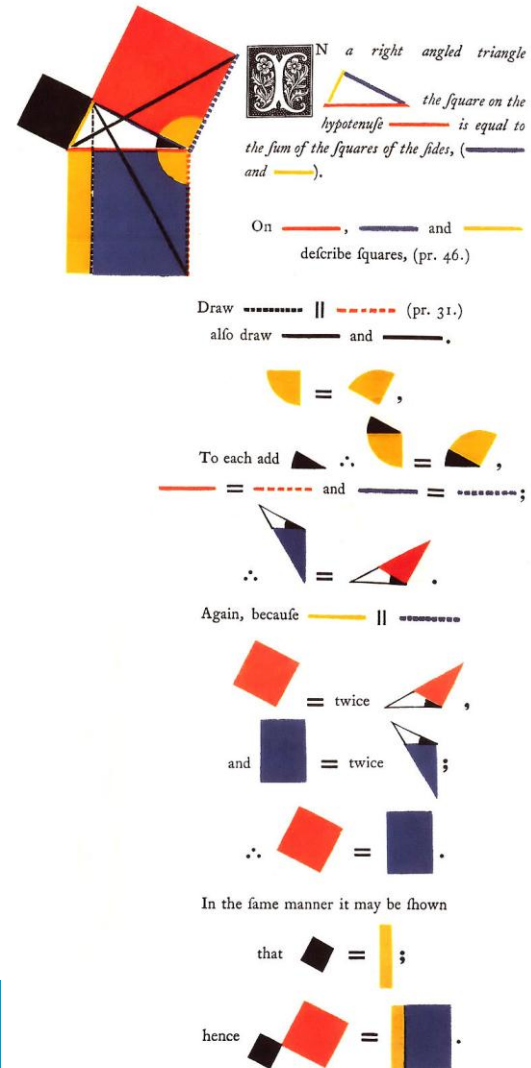
De Elementen van Euclides

- Context
 - 323 BC: dood van Alexander de Grote, rijk valt uiteen
 - na ong. 300 BC heerst Ptolemeïsche dynastie over Egypte
 - stad Alexandrië in Egypte wordt centrum van de wiskunde
- Euclides, ong. 300 v.Chr.
- ook eerdere auteurs schreven Elementen, maar niet bewaard gebleven
- niet de verzameling van alle tot dan toe gekende wiskunde, wel een inleidend handboek met alle elementaire wiskunde
- steunde op voorgangers: Pythagoreërs, Hippocrates, Eudoxos, Theaetetus, ..., maar bevat ook nieuwe kennis
- in de traditie van Plato en Aristoteles
- systematische opbouw van de behandelde kennis



Hoe kennen we de Griekse wiskunde?

- aanvankelijk op papyrus
- veel werken zijn helemaal verloren gegaan
- De Elementen van Euclides zijn via kopieën, kopieën van kopieën, ... blijven bestaan
- klein stukje kopie via papyrus Oxyrhynchus uit ong. 100 AD, ontdekt rond 1900
- bij het kopiëren werden fouten gemaakt / aanvullingen gemaakt / vereenvoudigingen doorgevoerd / 'verbeteringen' aangebracht / ...
- een heel aparte editie: Byrne, 1847

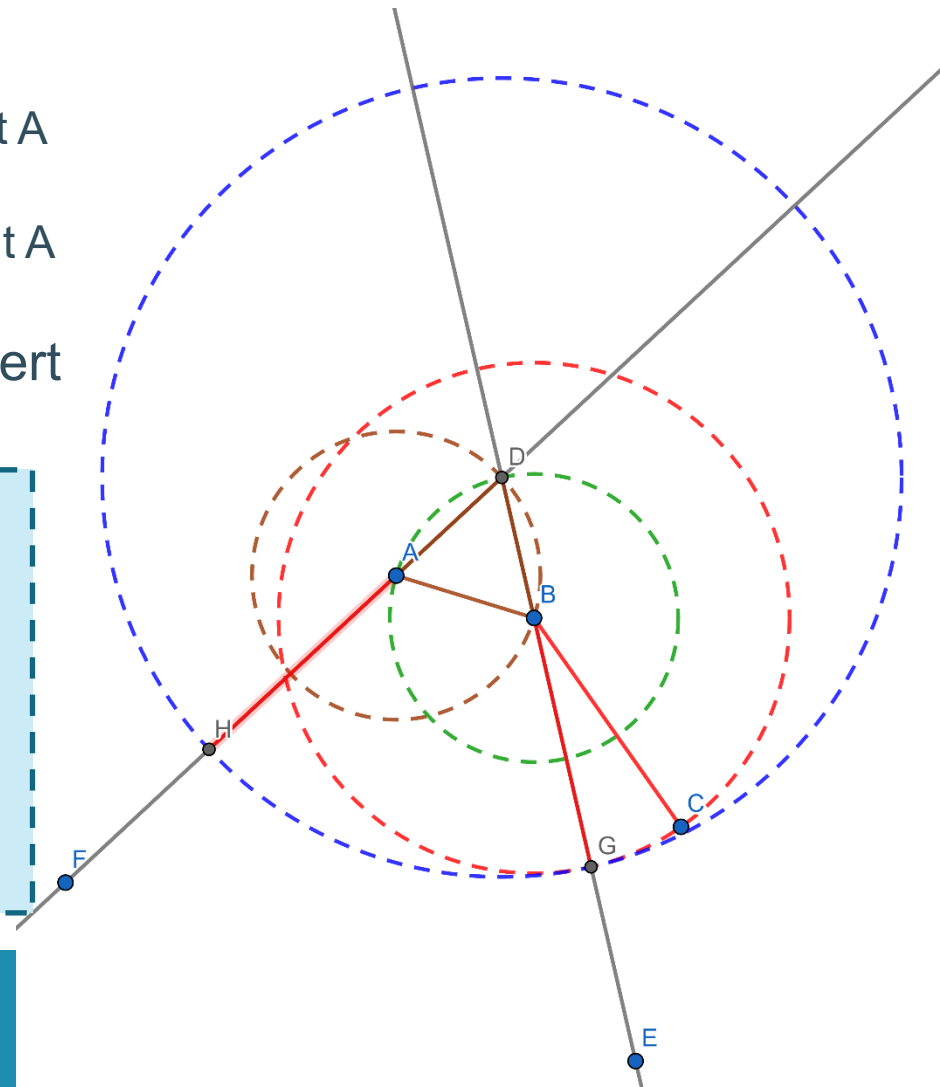
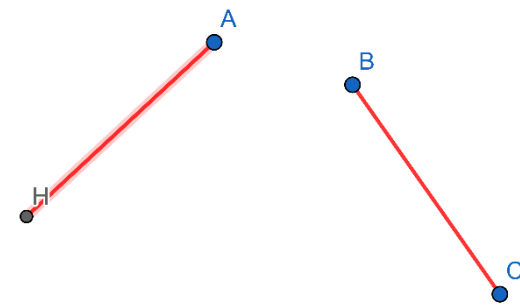


De start

- 23 definities
 - bv. “Een rechte is lengte zonder breedte” ...
- 5 postulaten
 - bv. “Het is mogelijk een rechte lijn te trekken van een punt tot een ander punt.” ...
- 5 axioma's
 - bv. “Dingen die gelijk zijn aan een derde, zijn ook onderling gelijk.” ...
- axioma's in de huidige betekenis komen eerder overeen met de postulaten van Euclides i.p.v. met zijn axioma's
- de definities zijn geen definities in de huidige betekenis; in feite basisbegrippen die juist ongedefinieerd blijven (net zoals je postulaten/ axioma's kunt zien als onbewezen eigenschappen)

Derde postulaat

- “Het is mogelijk een cirkel te construeren met een gegeven middelpunt en een gegeven straal.”
 - ruime interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal BC
 - strikte interpretatie: cirkel met middelpunt A en straal AH
- Propositie 2 uit boek 1: ‘strikt’ impliceert ‘ruim’



Terugblik op de 'nieuwe' wiskunde in het Oude Griekenland

- theoretisch, algemeen, abstract, zuiver, aandacht voor de grondslagen, ...
- accent op argumenteren en redeneren vanuit een beperkt aantal aannames
- kennismaken met de manier waarop de Oude Grieken aan wiskunde deden, bijvoorbeeld door iets te laten zien uit De Elementen van Euclides, kan voor (zeker een deel van de) leerlingen een kennismaking zijn met een manier om aan wiskunde te doen die in de laatste decennia minder aandacht gekregen heeft → dit doet nadenken over wat wiskunde is
- maar: ook in het Oude Griekenland is dit niet het hele verhaal!

De stelling van Pythagoras: Griekenland en China

De Elementen Boek 1 Propositie 47

- (rechtstreekse) stelling van Pythagoras
- opp. AFGC
= 2 maal opp. AFB
[redacted]
= 2 maal opp. ACD
[redacted]
= opp. rechthoek ADL
[redacted]
- ...

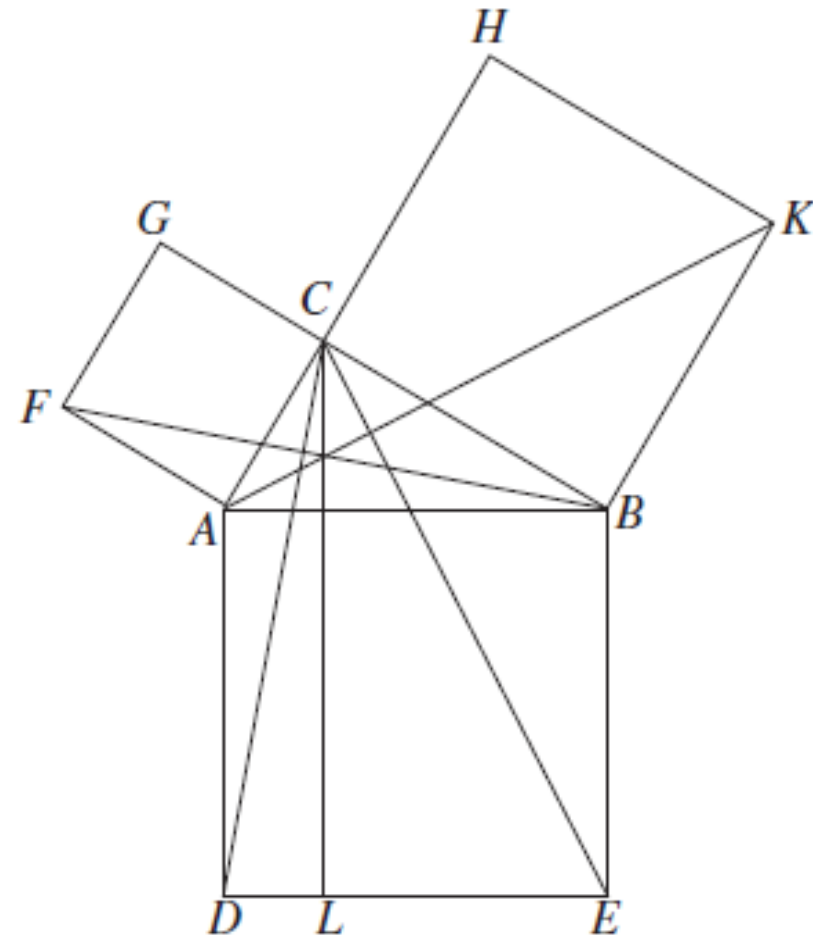
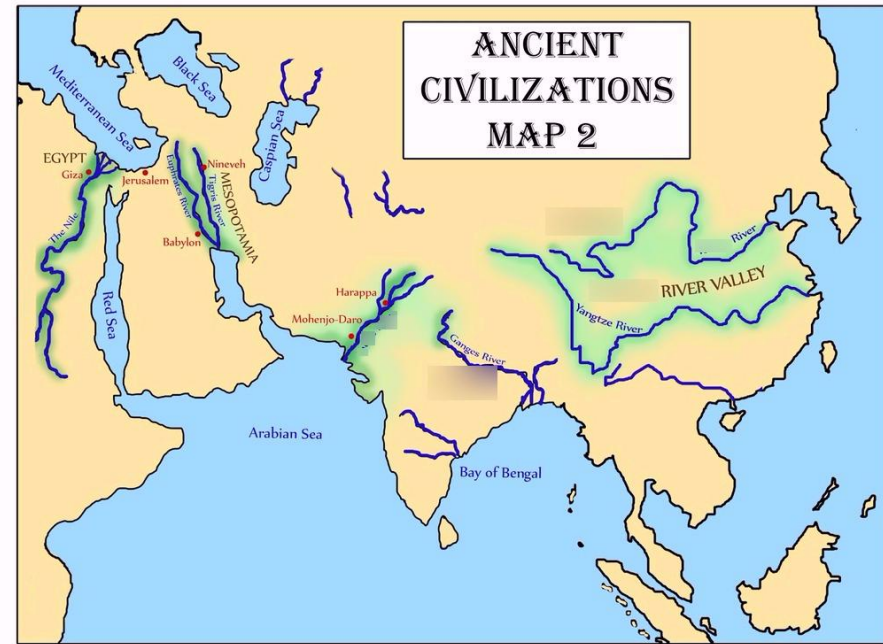


FIG. 5.4

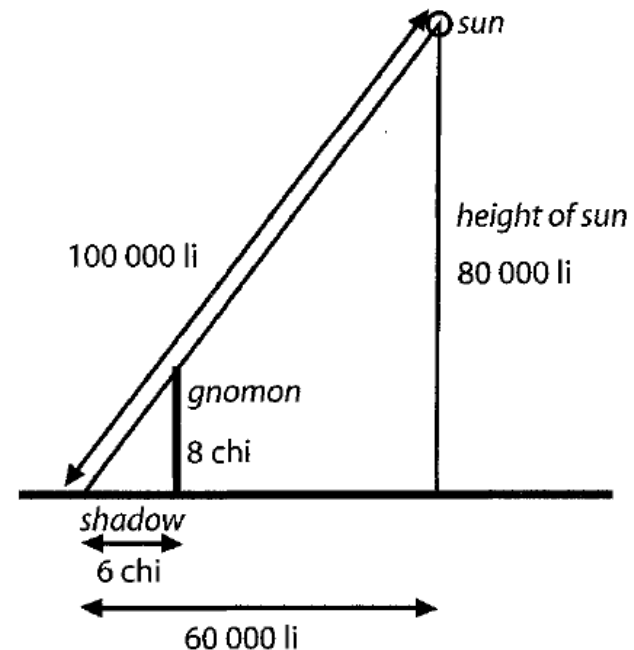
China

- start rond 2000 v.Chr. rond de Gele Rivier in het noorden, maar geen geschreven bronnen
- vanaf 400 v.Chr. tot 1600 n.Chr.
- geschriften op bamboebladeren, zijde, papier
- centrale rol voor staatsexamens om ambtenaar te kunnen worden
- tien klassieke geschriften als voorbereiding op de examens
 - bekendste werk: Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde (ook andere benamingen)
- rijke geschiedenis op het vlak van wiskunde
 - naast wat we hier bespreken: oplossen van stelsels van eerstegraadvergelijkingen met de methode van Gauss-Jordan, driehoek van Pascal, Chinese reststelling, ...
- ... maar eerder behoudsgezind: weinig evolutie doorheen de tijd



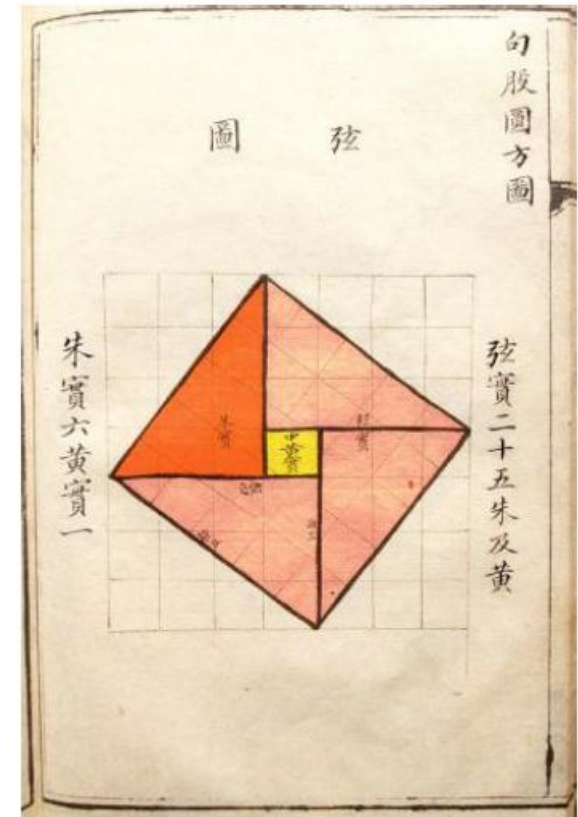
Gou-gu

- bronnen:
 - Dauben, J. (2009). Chinese Mathematics. in: Katz (zie eerder)
 - Dauben, J. (2019). The evolution of mathematics in Ancient China. From the newly discovered Shu and Suan shu shu bamboo texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol 19, N° 37, 25-78
- 9-de hoofdstuk uit de Negen hoofdstukken
- Chinezen benoemden het concept driehoek niet
- in plaats daarvan
 - gu = hoogte / gou = schaduw = basis / xian = snaar



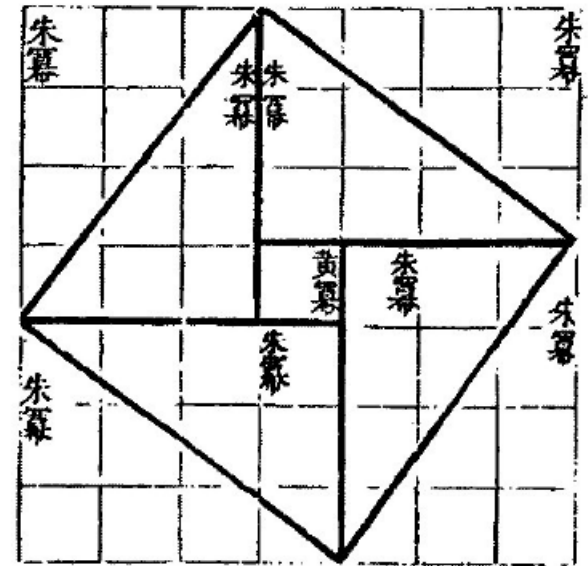
Gou-gu-relatie: de Chinese versie van de stelling van Pythagoras

- figuur hiernaast komt uit Zhou bi suan jing (The Mathematical Classic of the Zhou Gnomon, 1ste eeuw v.Chr.)
- bijbehorende tekst beschrijft hoe je uit de gou (basis) en de gu (hoogte) de xian vindt
 - neem 2 keer het product van gou en gu
 - tel er het kwadraat van het verschil tussen gou en gu bij op
 - dit is het kwadraat van de xian
 - maar ook 'onze' vorm van de stelling komt voor



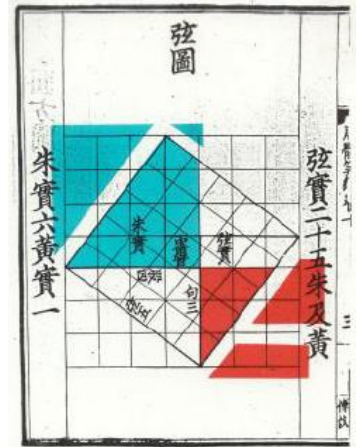
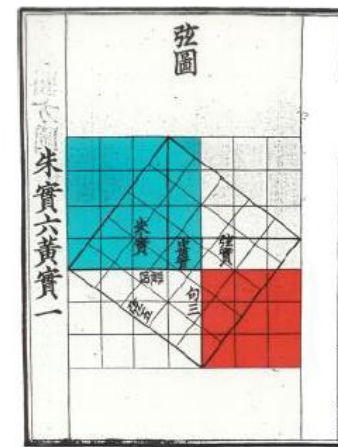
Gou-gu-relatie: de Chinese versie van de stelling van Pythagoras

- Liu Hui in Jiu zhang suan shu, Negen hoofdstukken over de kunst van de wiskunde
 - ...
 - argumentatie voor de algemene geldigheid
 - tekst is bewaard gebleven maar de begeleidende figuur niet
 - redenering is hierdoor niet met zekerheid te reconstrueren
 - figuur hiernaast is reconstructie uit de 15de eeuw in de Yongle dadian (Grote canon van de Yongle-periode, een Chinese encyclopedie)



Bewijs van gou-gu-relatie via out-in-principe

- reconstructie van het bewijs door Dauben
- verplaats de delen van de kleine vierkanten die buiten het grote vierkant liggen naar binnen het grote vierkant
- ... op de volgende manier

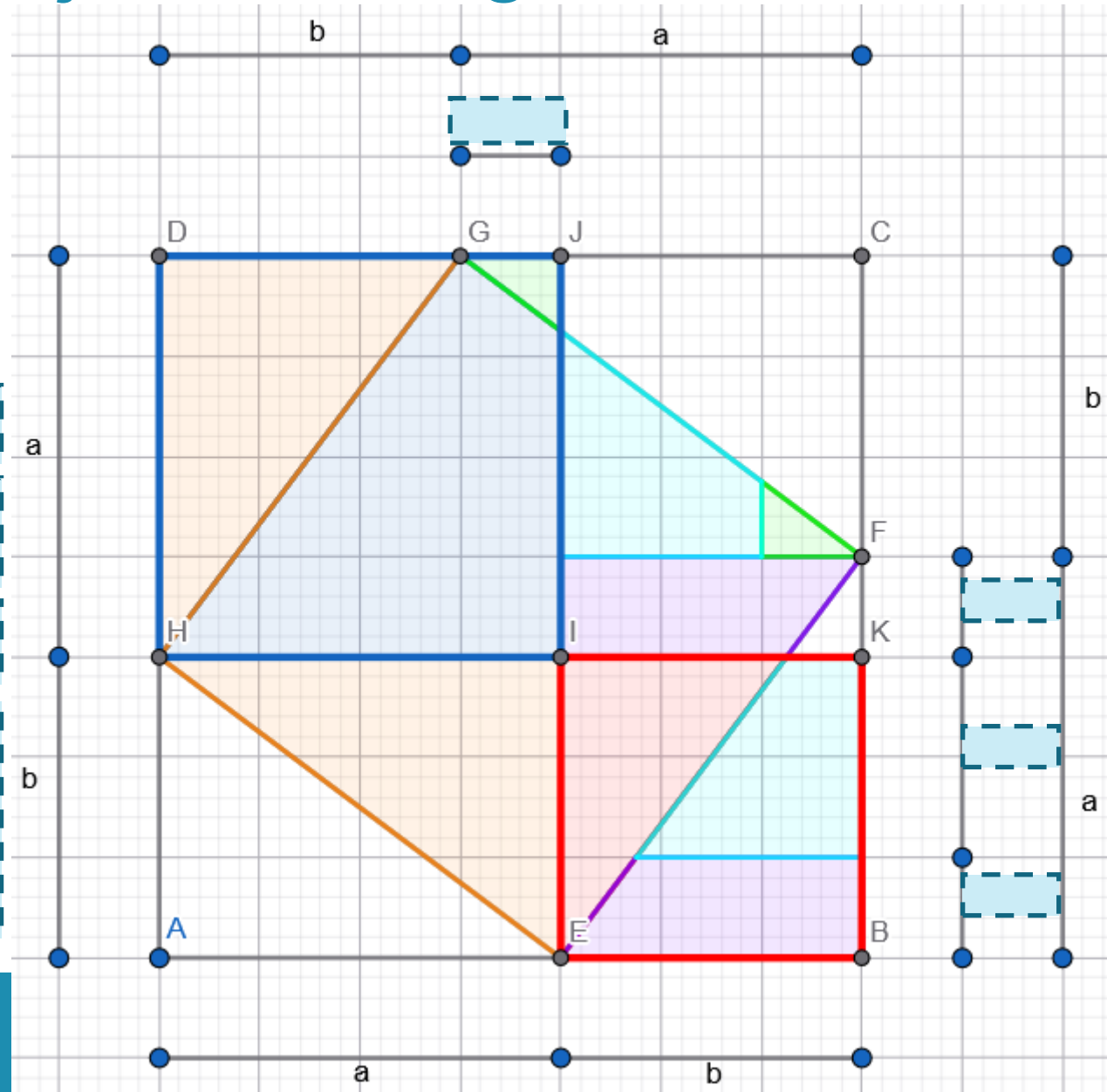
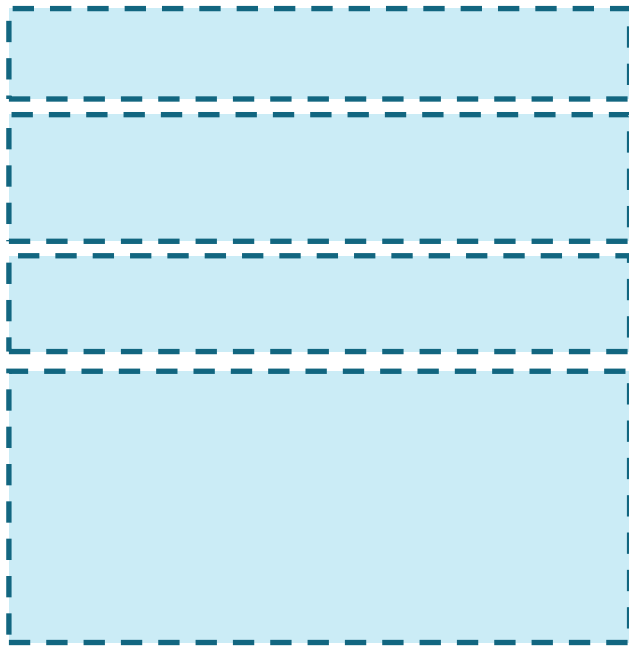


Gou-gu-relatie en het out-in-principe

- Chinese wiskundigen toonden wel (enige) interesse voor het verantwoorden van hun methoden, maar anders dan de Grieken
 - geen axiomatisch opgebouwde theorie
 - wel via voorbeelden, figuren, verantwoorden waarom een methode werkt, soms enkel voor een bepaalde categorie, ...
 - niet systematisch, ook veel voorbeelden waarin methoden beschreven worden zonder verantwoording
- Liu Hui wilde een 'bewijs' dat niet enkel voor de 3-4-5-driehoek geldt
 - klopt dit puzzelbewijs ook voor een algemene driehoek met rechthoekszijden $a \geq b$ en schuine zijde c ?
 - zie volgende slides!

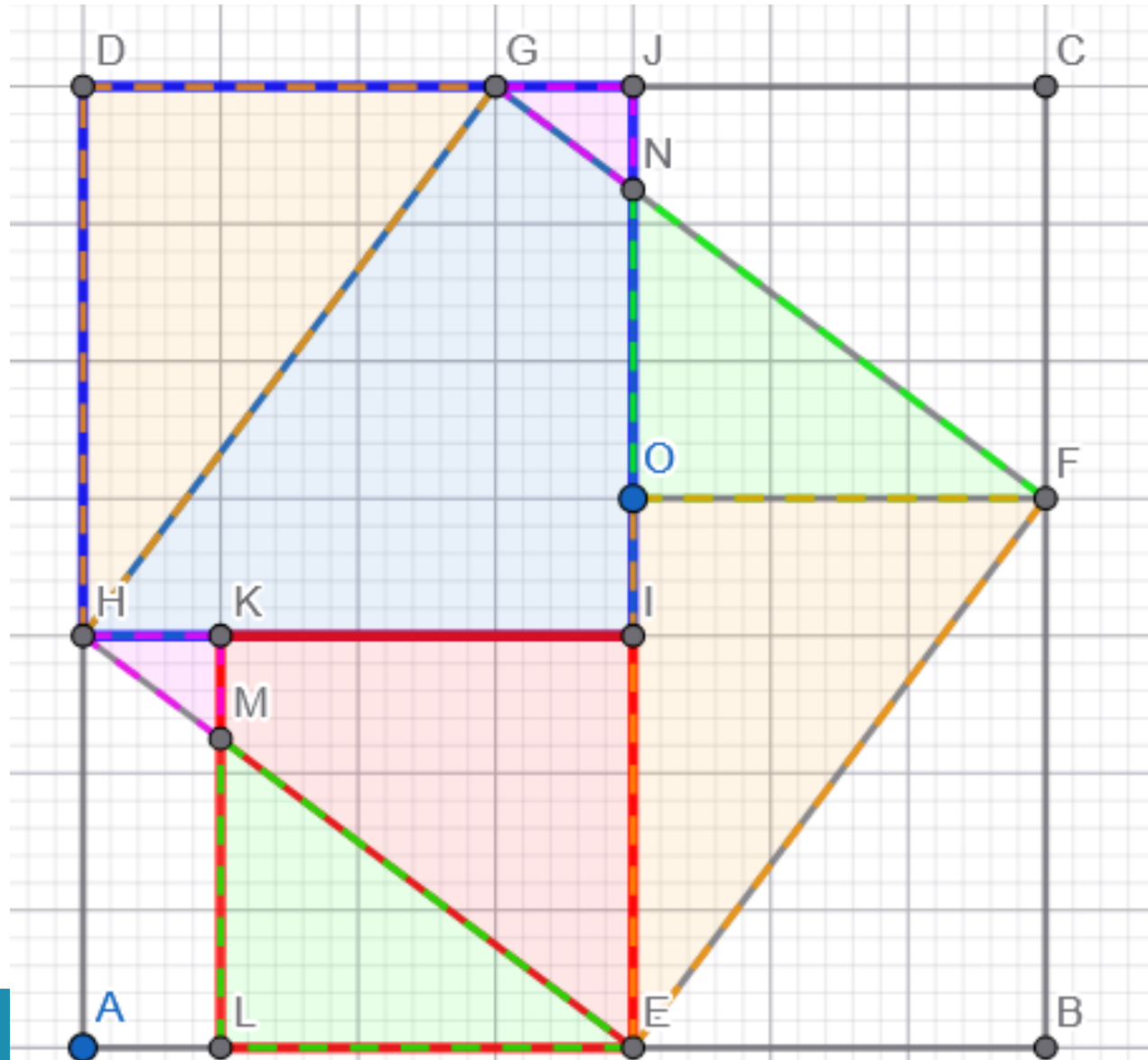
Klopt het bewijs in het algemeen?

- d.w.z. voor rechthoekige driehoeken met rechte zijden $a \geq b$ en schuine zijde c ?



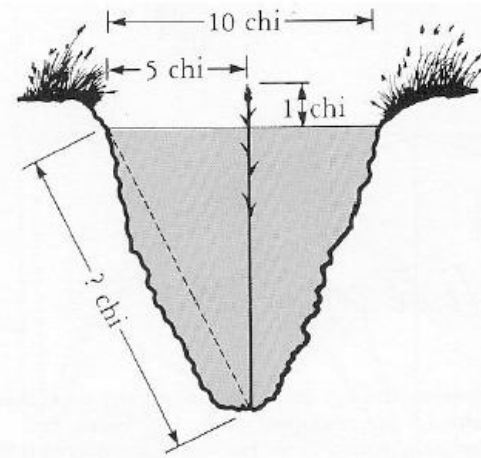
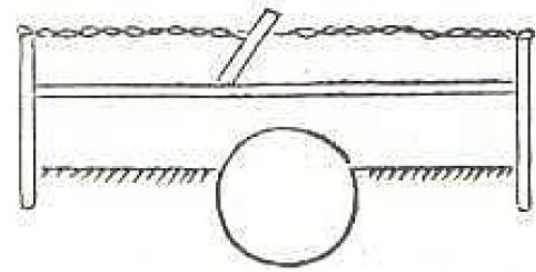
Nog een puzzelbewijs

- zie Dauben in Katz, p. 286
- een andere interpretatie van de beschrijving leidt tot een andere figuur
- reconstructie door Li Huang (1810)
- Zie je waar het belangrijkste verschil zit?



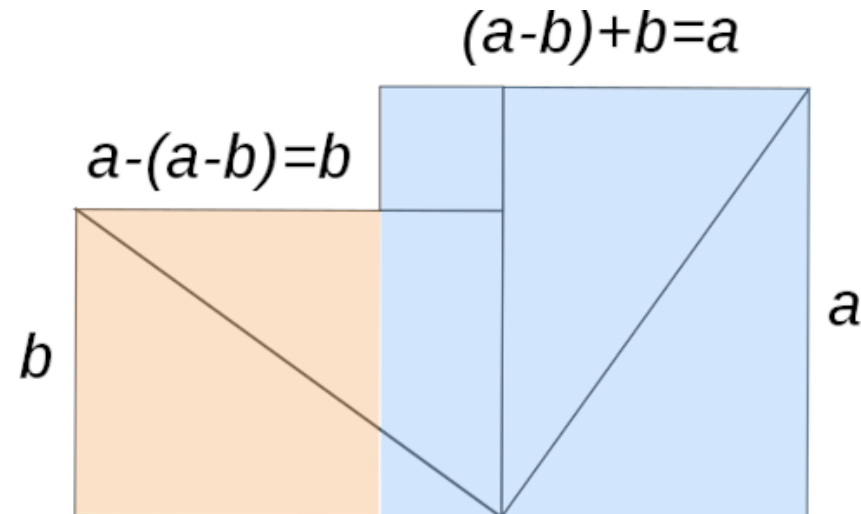
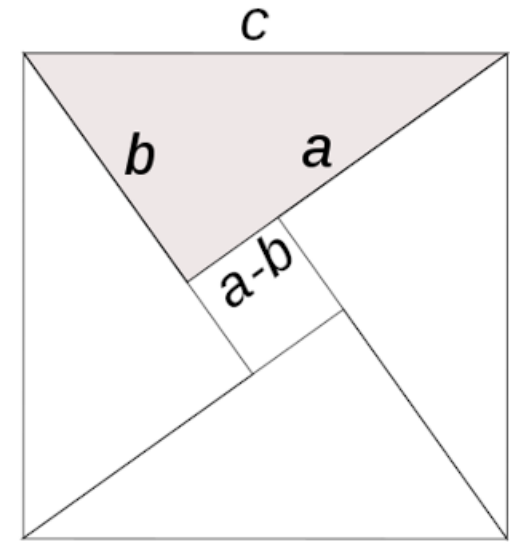
Enkele bekende toepassingen

- boomstam deels onder de grond, je zaagt ... diep, de snede meet ... , wat is de straal?
- een rietstengel staat in een put met water met diameter ... en steekt ... boven het oppervlak uit; als het riet omvalt, komt het gelijk met het oppervlak; wat is de lengte van het riet?
- een rietstengel met lengte ... is geknakt en de top van de stengel ligt ... van de voet, op welke hoogte is de stengel geknakt? (zie artikel uit Uitwiskeling)



Terugblik

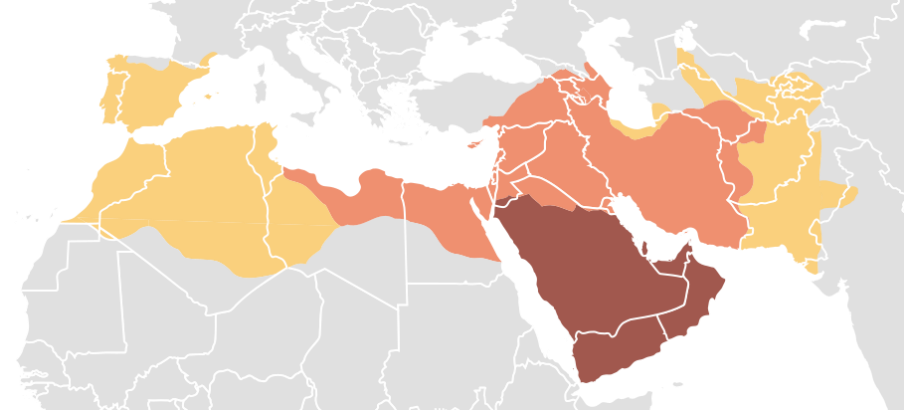
- Wat wij de stelling van Pythagoras noemen, was bekend in tal van culturen (Griekenland, China, Mesopotamië, India, ...).
- Heel veel culturen hebben bijgedragen hebben aan de wiskunde. Wiskunde is niet louter een West-Europees product.



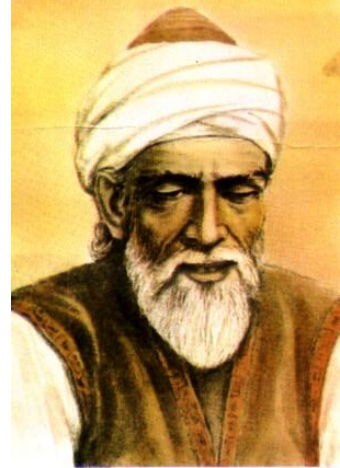
Een meetkundig voorbeeld uit de Islamitisch-Arabische cultuur

Context

- 622 AD: Mohammed wordt naast religieuze ook militaire leider, expansie tot 750 AD
- Islamitische rijk omvat of grenst aan alle oude culturen en aan Oost-Romeinse Rijk
- bloeiperiode: 750 – 1258, Abbasidische kalifaat, Bagdad als culturele centrum: Huis van de Wijsheid (bibliotheek, observatorium)
- praktische maar ook theoretische wiskunde: verzamelen, vertalen, bestuderen van bronnen uit Griekenland, India, Perzië, ...
- 1258: invasie Mongolen, Huis van de Wijsheid vernield, boeken in de rivier
- Islamitisch of Arabisch?
- rol van Arabische / Islamitische wiskunde lange tijd gereduceerd tot doorgeefluik, maar visie is sinds de jaren 1950 veranderd



Abu al-Wafa al-Buzjani

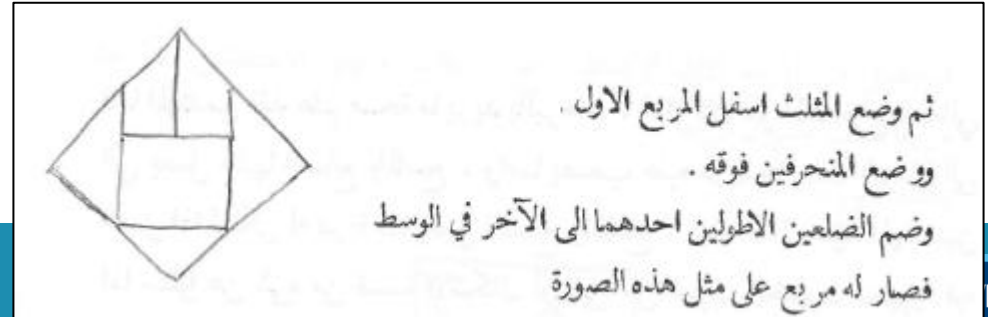


- bronnen
 - Beggren, J.L. (2009). Mathematics in Medieval Islam. in: Katz, V. (zie eerder)
 - Özdural, A. (2000). Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World. Historia Mathematica 27, 171-201
 - (en wellicht ook Jan Hogendijk, maar dat zou ik nog verder moeten uitzoeken)
- 940-997
- uit Buzhgan in Khorasan in huidige Iran
- werkte in Bagdad

Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

- vormde een brug tussen de theoretische en de praktische meetkunde (gericht op Islamitische kunst)
 - nuancering: er lijkt onder historici geen eenduidigheid te zijn over de vraag of dergelijk contact tussen theoretische en praktische wiskunde een courante praktijk was, dan wel eerder uitzonderlijk
- On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan (Kitab fima yahtaju ilayhi al-sani' min a'mal al-handasa), hoofdstuk 10: On dividing and composing the squares

“Een aantal **meetkundigen** en **ambachtslieden** hebben zich **vergist** in de kwestie van deze vierkanten en hun samenstelling. De meetkundigen [hebben zich vergist] omdat ze weinig ervaring hebben met het construeren ervan, en de ambachtslieden [hebben zich vergist] omdat ze geen kennis hebben van bewijzen. [...]”



Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

...

“Ik was aanwezig bij een aantal bijeenkomsten waaraan een groep meetkundigen en ambachtslieden deelnam. Hen werd gevraagd naar de **constructie van een vierkant uit drie vierkanten**. Een **meetkundige** construeerde gemakkelijk een lijn waarvan het kwadraat gelijk is aan de drie vierkanten⁽¹⁾, maar geen van de ambachtslieden was tevreden met wat hij had gedaan. De **ambachtsman wil die vierkanten verdelen in stukken waaruit één vierkant kan worden samengesteld**. [...]”

(1) Welke constructie maakten de ‘geometers’?

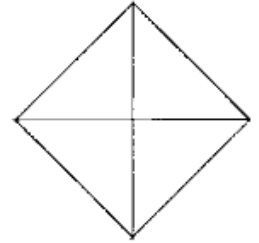
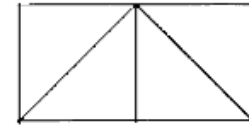


Abu al-Wafa al-Buzjani, On the Geometric Constructions Necessary for the Artisan

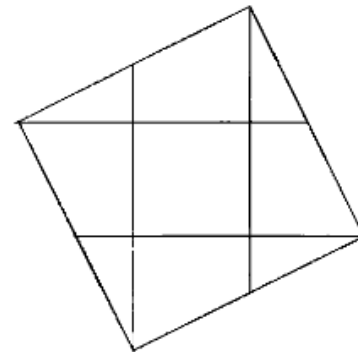
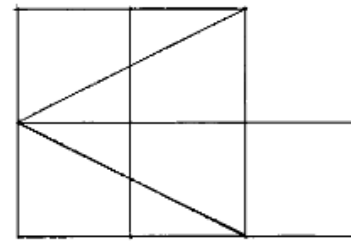
“De **ambachtslieden stelden een aantal methoden voor**, waarvan sommige bewezen kunnen worden en andere **onjuist** zijn. De methoden die niet bewezen kunnen worden, lijken echter waar te zijn, waardoor iemand die ernaar kijkt, zou kunnen denken dat ze juist zijn. We zullen deze methoden presenteren, zodat de juiste van de onjuiste onderscheiden kunnen worden en iemand die zich in dit onderwerp verdiept, hopelijk geen fout maakt door een onjuiste methode te accepteren.”

Eerst met andere aantallen dan $n = 3$

- $n = 2$
- zijde grote vierkant is $\sqrt{2}$
- staat model voor n is 'sum of two equal squares'
- bv. $n = 8, 18, \dots$

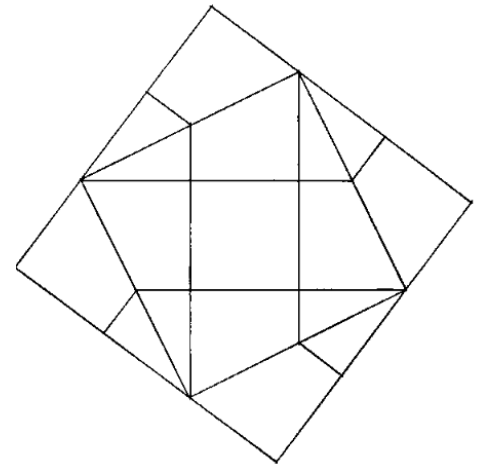
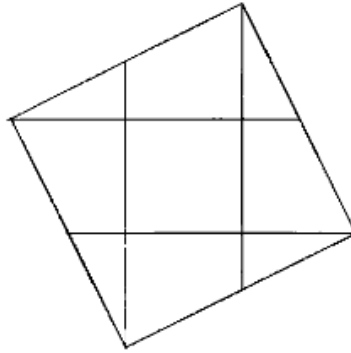
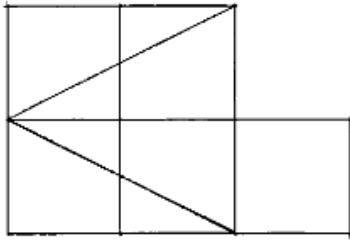


- $n = 5$
- zijde grote vierkant is $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$
- staat model voor n is 'sum of two unequal squares'
- bv. $n = 10 = 1^2 + 3^2, 13 = 2^2 + 3^2, \dots$

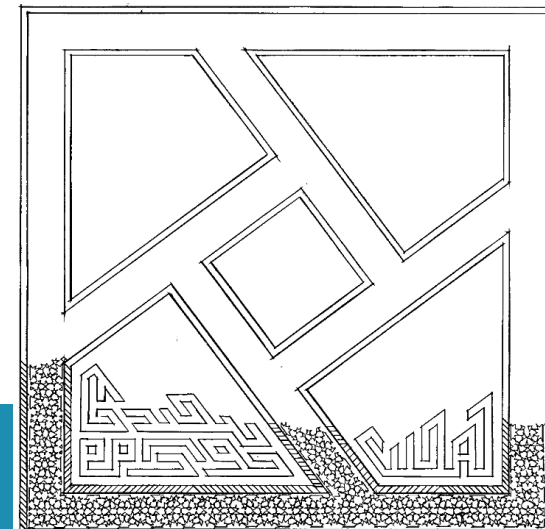
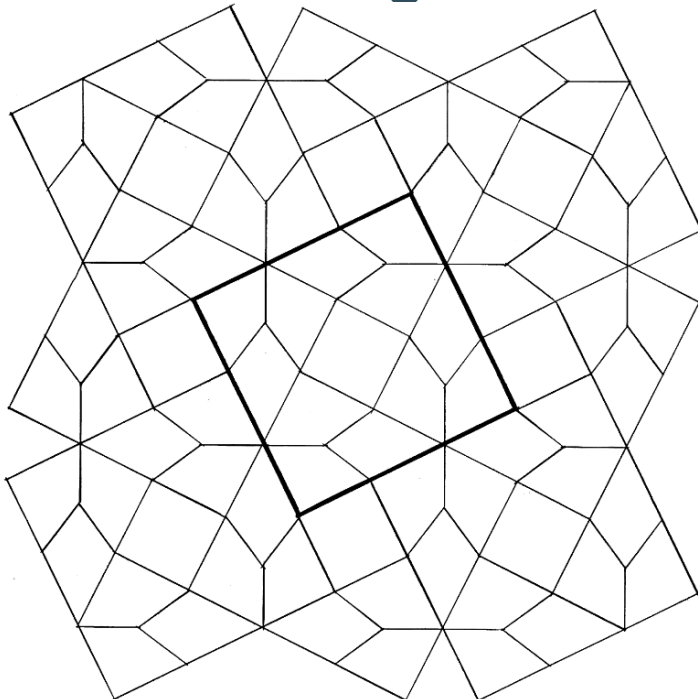
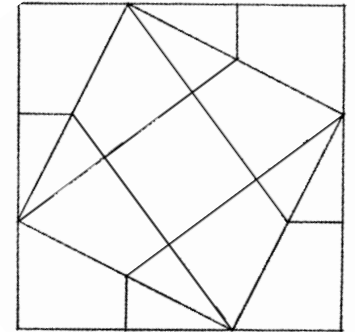


Eerst met andere aantallen

- $n = 5$

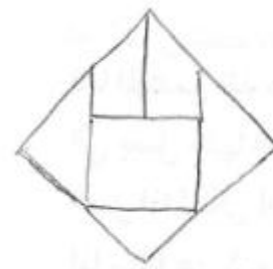


- vormt de basis voor mooie versieringen
- ... en vlakvullingen



Nu terug naar $n = 3$: een foute methode

“Een van de ambachtslieden plaatste een van de vierkanten in het midden, deelde het tweede vierkant diagonaal doormidden en plaatste het daar. [...] Hij trok vanuit het middelpunt van het derde vierkant twee rechte lijnen naar twee van de hoeken, niet op één diagonaal, en hij trok een lijn vanuit het middelpunt naar het middelpunt van de zijde tegenover de driehoek [...]. Zo wordt het vierkant verdeeld in twee trapeziums en een driehoek. Vervolgens plaatste hij [...]”



ثم وضع المثلث اسفل المربع الاول .
ووضع المنحرفين فوقه .
وضم الضلعين الاطولين احدهما الى الآخر في الوسط
فصار له مربع على مثل هذه الصورة

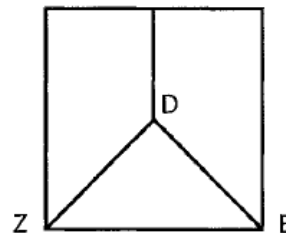
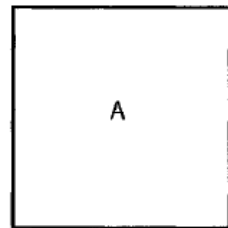
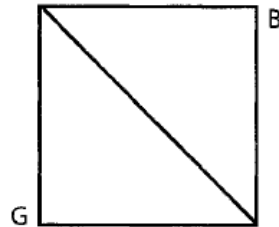
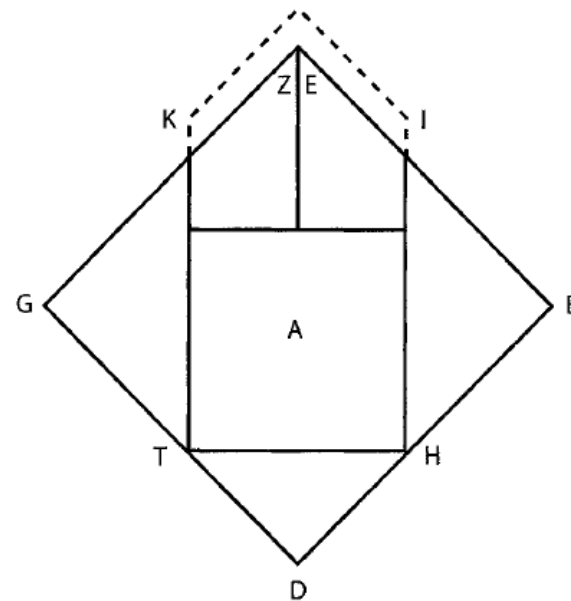


FIGURE 5.58

Een foute methode

“Abu al-Wafa’ zei: Maar **deze figuur die hij construeerde is ingebeeld**, en iemand die geen ervaring heeft met de kunst of de meetkunde [...] zou zich kunnen voorstellen dat deze correct is vanwege de **correctheid van de hoeken en de gelijkheid van de zijden**. [...] Elk van de hoeken van de [drie] driehoeken, namelijk G, B en D, die [ook] hoeken van het vierkant zijn, is een rechte hoek; en de vierde hoek is samengesteld uit twee hoeken die elk een halve rechte hoek zijn [...] De zijden zijn recht en gelijk, aangezien elk van deze zijden is samengesteld uit een zijde van een van de vierkanten plus de helft van de diagonaal, die gelijk zijn. Het is ook duidelijk dat ze rechte [lijnen] vormen wanneer ze samengevoegd worden [...]”

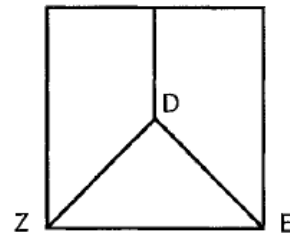
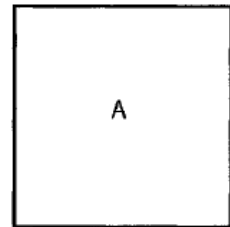
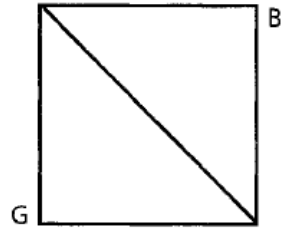
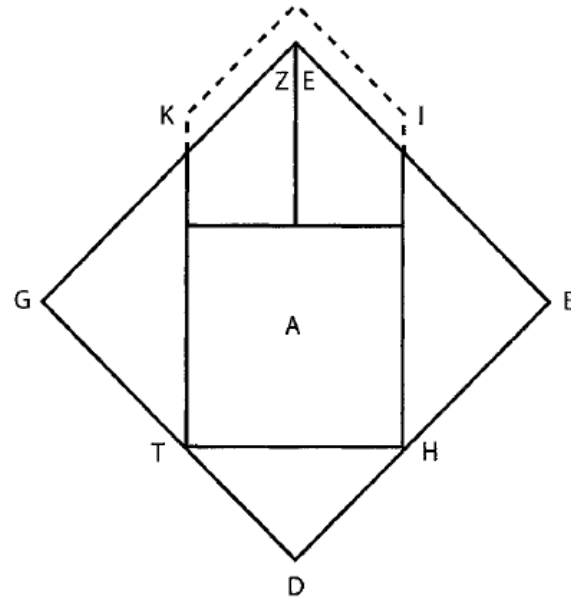


FIGURE 5.58

Een foute methode

“Maar ze merken niet op waar de fout [...] optreedt [...] Als we de zijde van elk [eenheids]vierkant ongeveer tien el maken [...] is de zijde van het [grote] vierkant bij benadering zeventien en een derde el⁽²⁾. Maar de zijde van dit vierkant [...] is zeventien en een veertiende⁽³⁾ el [...].”

(2) en (3) Leg uit!

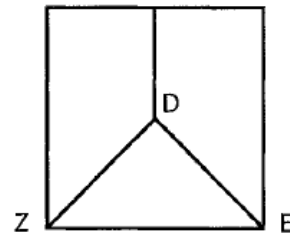
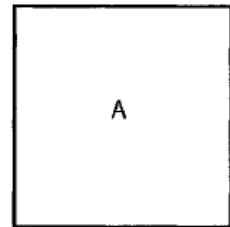
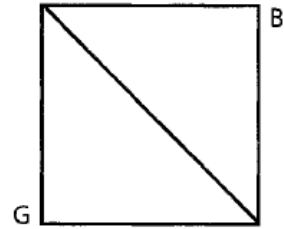
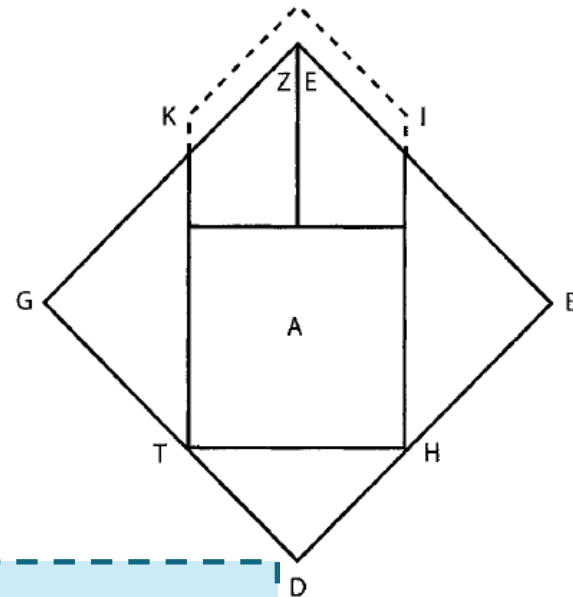


FIGURE 5.58

Een foute methode

Nogmaals, [...] twee lijnen, HI en TK
[...] de diagonaal van vierkant BG is bij
benadering veertien en een zevende⁽⁴⁾,
en zijde HI is vijftien⁽⁵⁾.

(4) en (5) Leg uit!

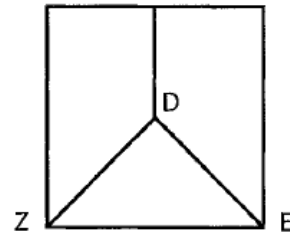
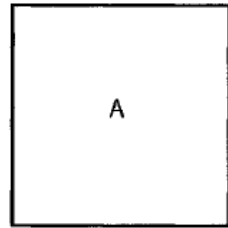
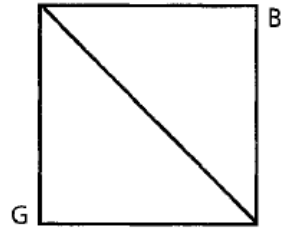
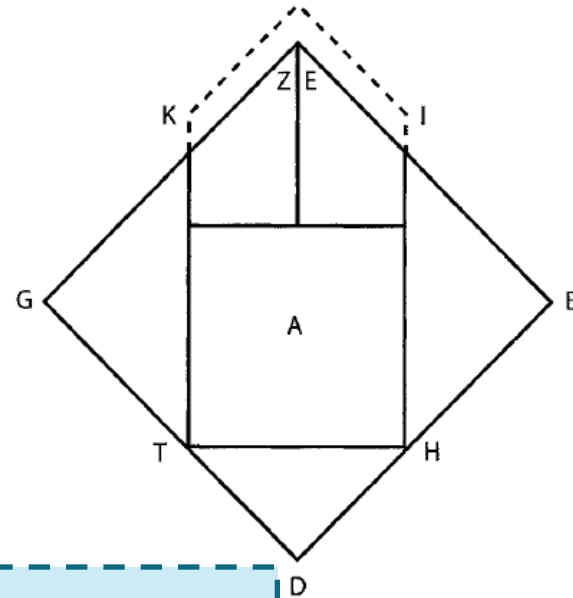
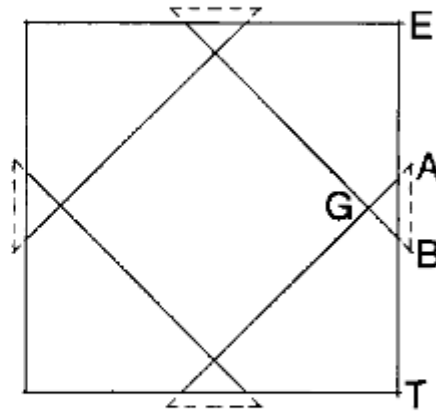
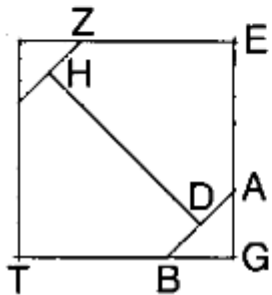
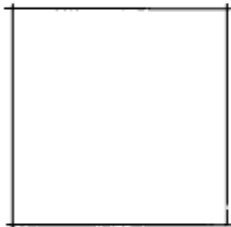
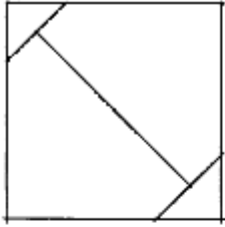


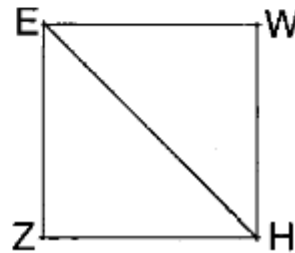
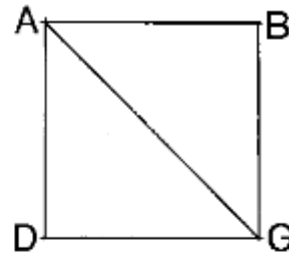
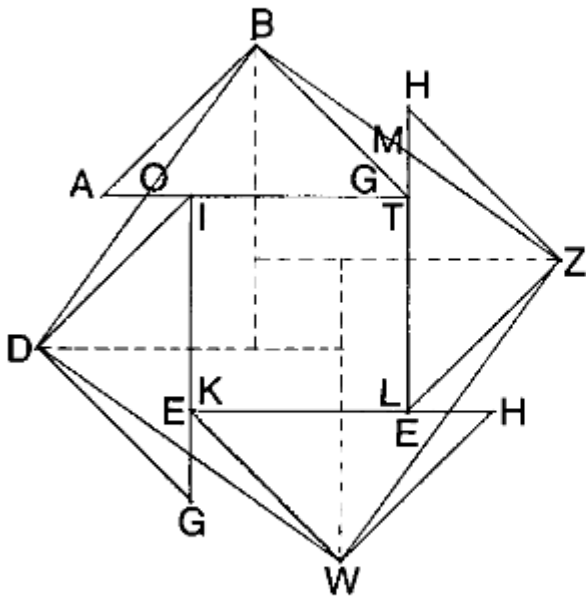
FIGURE 5.58

Nog een foute methode



- pas in het bovenste en onderste vierkant de zijde af op de diagonaal, symmetrisch rond het midden
- UOVT

En nu een correcte methode, door Abu al-Wafa al-Buzjani zelf



- BZWD is het gezochte vierkant
- 'uitstekende' stukjes moeten in de 'uitsparingen'
- correct, ...
- leg oorsprong in L en geef kleine vierkanten zijde 1
- $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $Z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- bovenstaande puzzelstukjes zijn congruent
- ... en via puzzelen
- ... maar gaf geen aanleiding tot versieringen en vlakvullingen

Hoe gaat het verder (uit Özdural, 2000)?

I have argued that mathematicians used cut-and-paste methods in their teaching of geometry for **two purposes**: to **prove the correctness** of certain constructions in a concrete way that could be **easily understood by the artisans**, and to present the constructions in such a way that the figures could be used to **create new decorative patterns**. In the hands of some talented mathematicians, the method turned out to be very effective and led to the discovery of a number of new patterns that became quite popular. [...]

The same **artisans**, however, **did not seem to use the opportunity to develop their own knowledge of geometry**. [a later work] shows that artisans were still dealing with geometry in their unmethodical and incorrect way three centuries after Abu'l-Wafa. The reason may have been that artisans always had access to the advice of mathematicians at their meetings, and therefore never took the trouble to acquire the knowledge themselves.

Terugblik

- gebruik van originele teksten geeft het integreren van geschiedenis in een wiskundeles extra kleur
 - ... ook als de teksten in het Nederlands vertaald zijn
 - misschien heb je wel leerlingen die het Arabisch kunnen lezen
- meetkunde in de stijl van Euclides blijft heel lang dominant/invloedrijk in de Islamitisch-Arabische cultuur en in Europa als ideaalbeeld van wiskunde

Bedankt voor je aandacht!
Vragen welkom!