

Werkbladen 3

Terugzoeken

We keren nu de vraag om. Bij een gegeven percentage (oppervlakte) zoeken we de bijbehorende grenswaarde(n). Als voorbeeld zoeken we hoe groot een Nederlandse vrouw anno 1947 moest zijn opdat 75% van de vrouwen kleiner zou zijn dan zij. Dit komt overeen met het derde kwartiel.

1. Een goede start is de grafiek van de normale dichtheidsfunctie. Teken de grafiek en doe een gokje: tot waar moet je gaan om driekwart van de totale oppervlakte te arceren? (De vuistregels kunnen een handje helpen bij dat gokken.) Verbeter je eerste gok tot je een aanvaardbaar antwoord hebt.

Het is uiteraard heel omslachtig om zo tot het goede antwoord te komen. Gelukkig is er een instructie voorzien op de grafische rekenmachine waarmee je dit rechtstreeks kunt berekenen. Je vindt die onder het menu [DISTR] en vervolgens 3:invNorm(. We geven de juiste parameters in (het percentage, het gemiddelde en de standaardafwijking) en vinden zo het antwoord op de vraag waar het derde kwartiel zich bevindt.

```
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:tpdf(
5:tcdf(
6:X²pdf(
7↓X²cdf(
```

```
invNorm(.75,162.
05,6.5016)
166.4352626
```

2. Verwoord wat de betekenis is van het resultaat van deze berekening.
3. Gebruik de functie *invNorm* om de grenzen te vinden van het gebied van de middelste 95%.

Komkommertijd

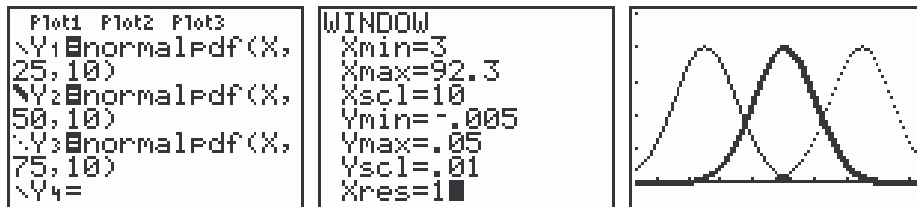
Op een groenteveiling worden in een bepaalde periode van de zomer te veel komkommers aangevoerd. Het zijn er zo veel dat er een overschot van 25% van de aanvoer is. Om de komkommerprijs niet te laten instorten besluit de directie van de veiling, in overleg met de kwekers, de 25% kleinste komkommers niet op de markt te brengen. Uit een steekproef leidt men af dat lengte van de komkommers klokvormig verdeeld is met een gemiddelde lengte van 40 cm en een standaardafwijking van 6 cm.

1. Laat je rekenmachine de grafiek tekenen van de normale dichtheidsfunctie die de lengte van de komkommers beschrijft.
2. Welk percentage van de komkommers zal langer zijn dan 50 cm? Duid de overeenkomstige oppervlakte aan op je grafiek.
3. De 25% kleinste komkommers zullen niet geveild worden. Hoelang moet een komkommer dan minstens zijn om op de markt te komen?
4. De 10% langste komkommers krijgen het etiket “jumbo-komkommer”. Vanaf welke lengte is een komkommer een jumbo?

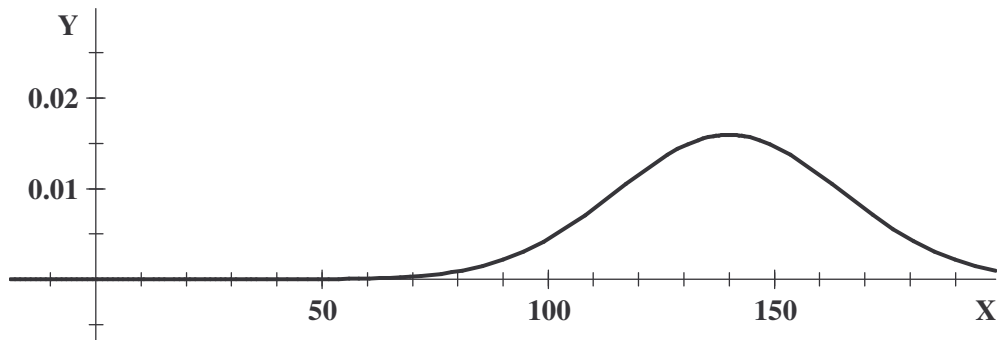
Werkblad 4a

Normale dichtheidsfuncties en de standaardnormale dichtheidsfunctie

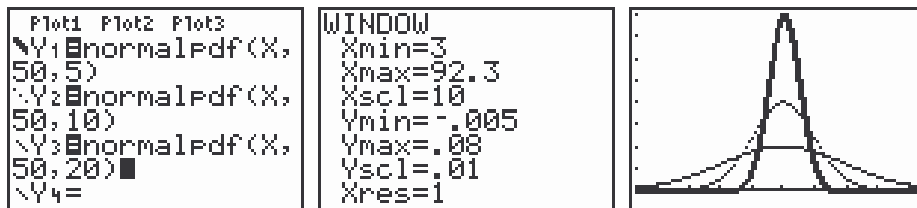
1. Zoek een goed tekenvenster voor de normale dichtheidsfunctie met gemiddelde 50 en standaardafwijking 10.
2. Hieronder zie je de normale dichtheidsfuncties met gemiddelde 25, 50 en 75 en met standaardafwijking 10 op één tekening. Welk verband bestaat er tussen deze drie grafieken?



3. Leg uit hoe je het gemiddelde van een normale dichtheidsfunctie kunt aflezen op de grafiek. Wat is het gemiddelde van de normale dichtheidsfunctie die je hieronder ziet?

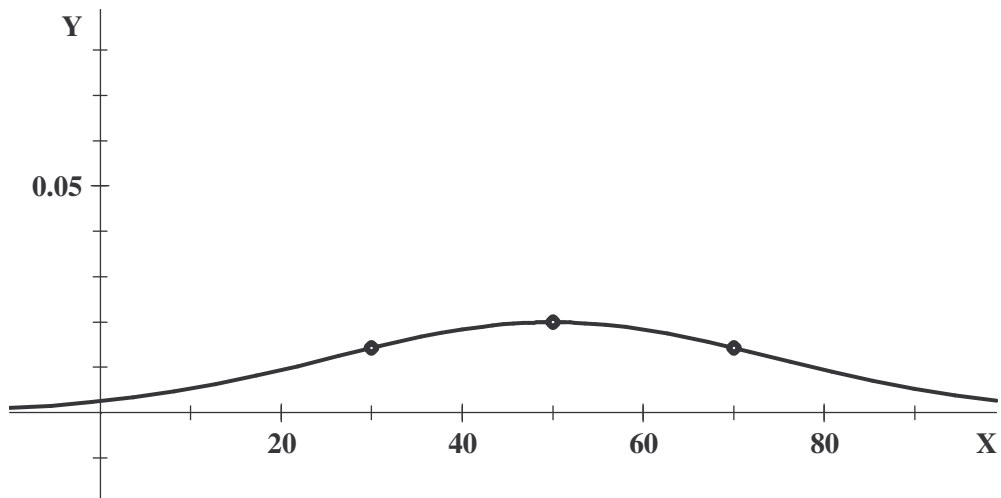
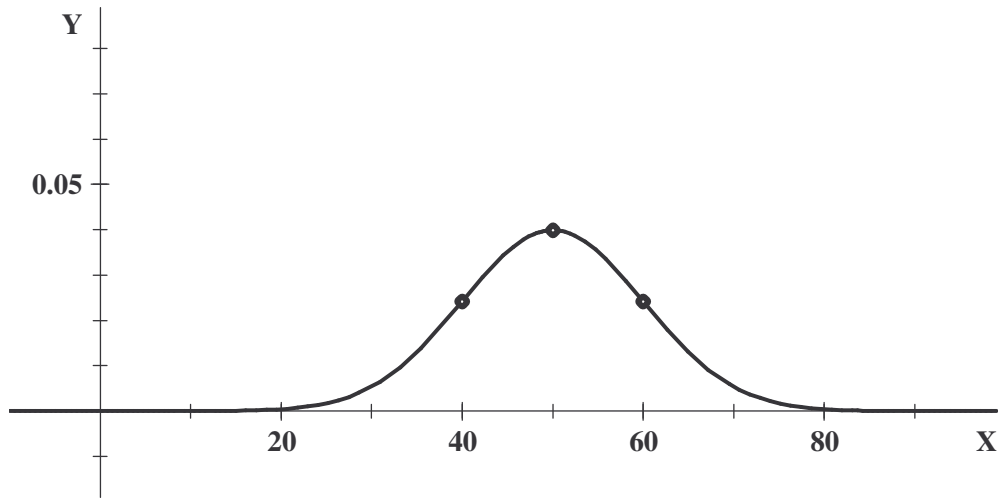
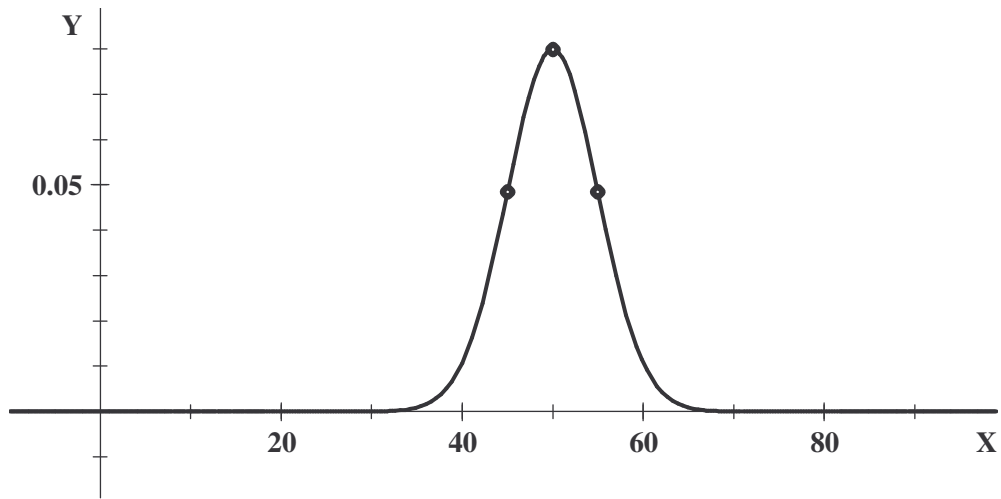


4. Hieronder zie je de normale dichtheidsfuncties met gemiddelde 50 en standaardafwijking 5, 10 en 20 op één tekening. Het is nu moeilijker om precies te beschrijven hoe je van de ene naar de andere grafiek overgaat. Probeer toch maar eens.



We hebben er vroeger de aandacht op gevestigd dat de totale oppervlakte onder de kromme gelijk is aan 1. Dat verklaart waarom we zowel horizontaal als verticaal moeten uitrekken/samendrukken. Horizontaal uitrekken vergroot immers de oppervlakte onder de grafiek. Om dat te compenseren moeten we verticaal samendrukken.

5. De onderstaande figuren tonen meer nauwkeurigere (computer)grafieken van de drie dichtheidsfuncties uit de vorige opgave. Op elk van de drie grafieken zijn drie punten aangeduid. Probeer in woorden uit te leggen wat er speciaal is aan deze punten en geef telkens de x -coördinaat van deze punten. Welk verband bestaat er tussen het voorschrift van de functies (zie vraag 4) en de x -coördinaten van de punten?



6. Probeer nu uit te leggen hoe je de standaardafwijking van een normale dichtheidsfunctie kunt aflezen op de grafiek. Wat is de standaardafwijking van de normale dichtheidsfunctie uit de figuur bij opdracht 3?

In de vorige opgaven hebben we je gevraagd te letten op de *verschillen* tussen de grafieken. Er zijn echter ook opvallende *overeenkomsten*: alle grafieken liggen boven de horizontale as, ze zijn symmetrisch ten opzichte van een verticale rechte door het hoogste punt, ... Het voornaamste gemeenschappelijke kenmerk is dat de grafieken van alle normale dichtheidsfuncties *klokvormig* zijn.

De grafieken van alle normale dichtheidsfuncties lijken dus heel goed op elkaar. Bovendien kun je de ene grafiek afleiden uit een andere door verschuiven en horizontaal/verticaal uitrekken/samendrukken. Daarom wordt één van de normale dichtheidsfuncties de *standaardnormale dichtheidsfunctie* genoemd, namelijk de

normale dichtheidsfunctie met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Alle andere normale dichtheidsfuncties kunnen hiervan afgeleid worden. Als je de standaardnormale dichtheidsfunctie met je rekenmachine tekent, hoef je geen parameters op te geven. In plaats van 'normalpdf(X,0,1)' kun je dus gewoon 'normalpdf(X)' ingeven.

7. Teken deze dichtheidsfunctie met je rekenmachine.
8. Leg uit hoe je de grafiek van de normale dichtheidsfunctie met gemiddelde μ en standaardafwijking σ kunt afleiden uit de grafiek van de standaardnormale dichtheidsfunctie.

Toepassing

9. Een bottelarij gebruikt een vulmachine om plastic flessen van een halve liter te vullen met cola van een bepaald merk. De flessen worden verondersteld 500 ml cola te bevatten. In werkelijkheid varieert de inhoud volgens een normale verdeling met gemiddelde 498 ml en standaardafwijking 3 ml.

- a. Hoeveel procent van de flessen bevat minder dan 495 ml?

We hebben drie verpakkingen van 6 flessen. Van elke fles meten we de inhoud. In de tabel hieronder zie je de resultaten.

	fles 1	fles 2	fles 3	fles 4	fles 5	fles 6	\bar{x}
verpakking 1	493	494	501	498	499	493	
verpakking 2	503	499	490	501	495	496	
verpakking 3	500	499	505	493	502	505	

- b. Bereken voor iedere verpakking de gemiddelde inhoud per fles. (496,3; 497,3; 500,7)
- c. Bereken nu het gemiddelde van deze drie gemiddelden. Wat merk je op?

We bekijken nu in gedachte alle verpakkingen van 6 flessen. Van elke verpakking kunnen we de gemiddelde inhoud per fles bepalen. De wiskundige statistiek leert ons dat deze gemiddelde inhouden ook normaal verdeeld zijn met hetzelfde gemiddelde (498 ml) en dat de standaardafwijking $\frac{3}{\sqrt{6}}$ ml is.

- d. Teken in één figuur de normale dichtheidsfunctie voor de inhoud van één enkele fles en de normale dichtheidsfunctie voor de gemiddelde inhoud per fles van een verpakking van 6 flessen.
- e. In hoeveel procent van de gevallen zul je bij een verpakking van 6 flessen een gemiddelde inhoud per fles van minder dan 495 ml vinden?

Werkblad 4b

Deze werktekst is bedoeld voor leerlingen uit een 6-uursrichting. Hier is de overstap gemaakt van relatieve frequentie naar kansen.

Het steekproefgemiddelde

Een bottelarij gebruikt een vulmachine om plastic flessen van een halve liter te vullen met cola van een bepaald merk. De flessen worden verondersteld 500 ml cola te bevatten. In werkelijkheid varieert de inhoud volgens een normale verdeling met verwachtingswaarde 498 ml en standaardafwijking 3 ml.

1. Hoe groot is de kans dat één enkele fles minder dan 495 ml bevat?

Deze kans is vrij groot! Hoe zit het nu als we een pak met zes flessen kopen? In deze werktekst onderzoeken we de kans dat het gemiddelde van een pak van zes flessen minder dan 495 ml is.

We berekenen de verwachtingswaarde van het gemiddelde van het pak. We weten dat

$$\bar{X} = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6).$$

Hierin zijn de X_i 's stochastische variabelen die de inhoud van de zes flessen voorstellen. Deze zes stochastische variabelen hebben alle zes dezelfde verdeling als de populatie waaruit de steekproef van zes flessen genomen wordt. Ze zijn dus normaal verdeeld met gemiddelde 498 ml en standaardafwijking 3 ml. Verder nemen we aan dat het vullen van de zes flessen beschreven wordt door onafhankelijke stochastische veranderlijken.

2. Bereken $\mu_{\bar{X}}$ en $\sigma_{\bar{X}}$ met behulp van de onderstaande rekenregels voor verwachtingswaarden en standaardafwijkingen.

Indien X en Y onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geldt:

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \quad (\text{of: } \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Indien X een stochastische variabele is en a een reëel getal, dan is:

$$\mu_{aX} = a \cdot \mu_X$$

$$\text{var}(aX) = a^2 \cdot \text{var}(X) \quad (\text{of: } \sigma_{aX} = |a| \cdot \sigma_X)$$

Indien X en Y normaal verdeelde stochastische variabelen zijn, dan zijn $a \cdot X$ en $X + Y$ ook normaal verdeeld.

3. Bereken $\mu_{\bar{X}}$ en $\sigma_{\bar{X}}$ indien je een steekproef van n flessen neemt.

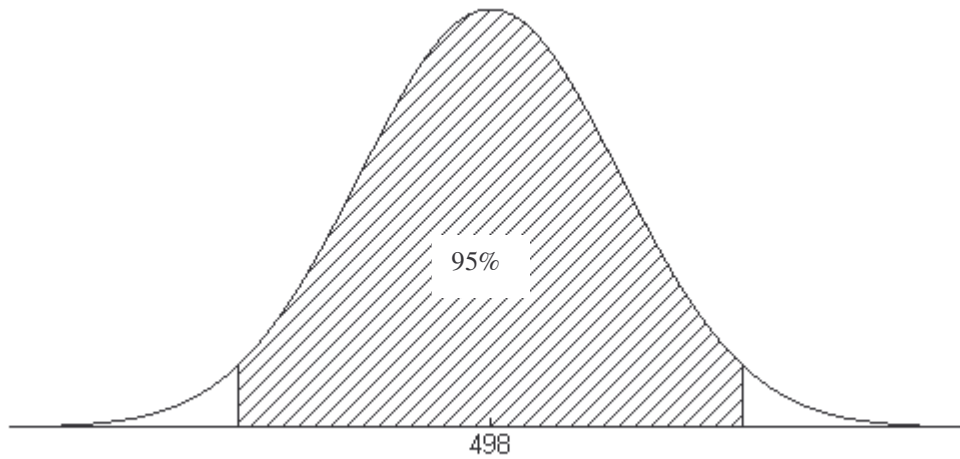
4. Verklaar op grond van de formules: de spreiding van het steekproefgemiddelde is minder groot dan de spreiding van één enkele waarneming. Hoe groter de steekproef, hoe kleiner de spreiding. Kun je dit ook intuïtief verklaren?

5. Laat je rekentoestel in één figuur de verdeling van het steekproefgemiddelde (in het vet) voor steekproeven met grootte 6 en de verdeling van de populatie (en dus van 1 enkele waarneming) tekenen.

6. Bereken nu de kans uit het voorbeeld bij het begin van deze werktekst: wat is de kans dat het gemiddelde van het pak met zes flessen kleiner is dan 495 ml?

De grootte van de steekproef beïnvloedt dus de spreiding van het steekproefgemiddelde. Stel dat je wilt dat 95% van de steekproefgemiddelden hoogstens 1 ml afwijkt van het echte gemiddelde. We gaan dan op zoek naar de minimale grootte van de steekproef.

7. Schrijf de grenswaarden van het gearceerde gebied erbij op de figuur hieronder.



Je kunt de grenswaarden met je rekentoestel niet vinden omdat je de standaardafwijking van deze verdeling niet kent. Daarom maken we een omweg via de standaardnormale verdeling.

8. Welke waarde hoort bij de bovengrens van het gearceerde gebied in het geval van de standaardnormale verdeling? Schrijf ook bij de ondergrens en het gemiddelde de corresponderende x -waarden van de standaardnormale verdeling.
9. Leid uit de figuur af dat voor een maximale foutenmarge van 1 ml geldt:

$$1 \geq 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

10. Hoe groot moet de steekproef minstens zijn?

Werkblad 4b Antwoorden

Het steekproefgemiddelde

1. Noteer met X de inhoud van één willekeurig gekozen fles cola. We weten dat X normaal verdeeld is met gemiddelde 498 ml en standaardafwijking 3 ml. De kans dat één enkele fles minder dan 495 ml bevat, is 15,87%.

```
normalcdf(-10^99
,495,498,3)
.1586552596
```

2. We weten dat $\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \dots = \mu_{X_6} = 498 = \mu$ en $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \dots = \sigma_{X_6} = 3 = \sigma$. We zullen de berekeningen hieronder maken met μ en σ . Zo zijn de resultaten gemakkelijker te veralgemenen. Eerst berekenen we het gemiddelde van de totale som.

$$\mu_{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6} = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \mu_{X_3} + \mu_{X_4} + \mu_{X_5} + \mu_{X_6} = 6 \cdot \mu.$$

Hieruit vinden we

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_{\frac{1}{6}(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6)} = \frac{1}{6} \mu_{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \mu = \mu$$

Bijgevolg is de verwachtingswaarde van het gemiddelde van het pak ook 498 ml.

Om de standaardafwijking te berekenen zoeken we eerst de variantie. Voor de variantie van de totale som krijgen we gebruik makend van de gegeven rekenregels:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) &= \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \text{var}(X_3) + \text{var}(X_4) + \text{var}(X_5) + \text{var}(X_6) \\ &= 6 \cdot \text{var}(X_1) \\ &= 6 \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}) &= \text{var}\left(\frac{1}{6}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)\right) \\ &= \frac{1}{6^2} \text{var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) \\ &= \frac{1}{6^2} \cdot 6 \cdot \sigma^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\text{var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

De spreiding van de gemiddelde inhoud van een pak van zes flessen is dus kleiner dan de spreiding van de inhoud van één fles.

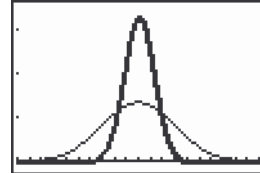
3. Analoge berekeningen geven

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \text{ en } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

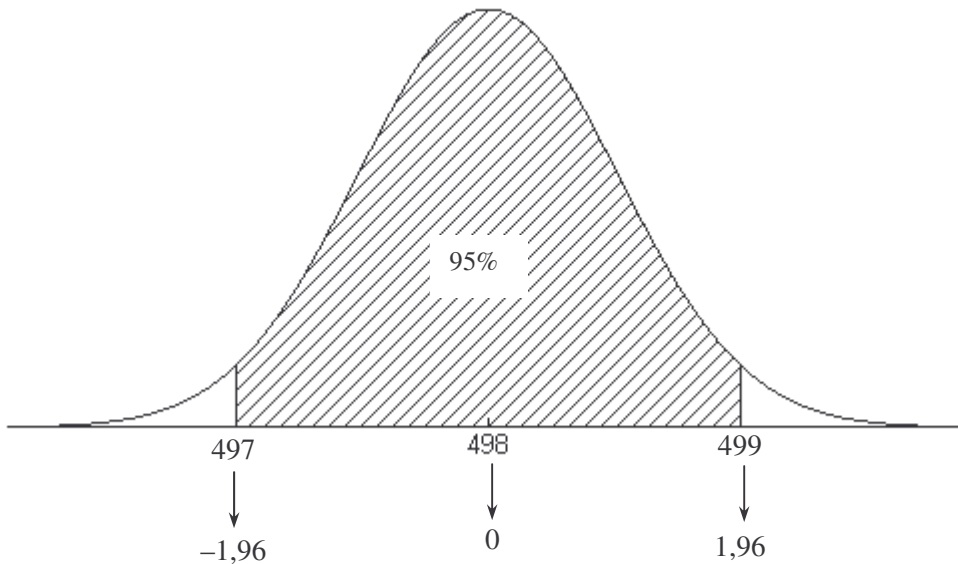
4. Omdat n in de noemer staat, wordt $\sigma_{\bar{x}}$ kleiner als n groter wordt. Dus: hoe groter de steekproef, hoe kleiner de spreiding. Als je een steekproef neemt van bv. 6 flessen, i.p.v. één enkele fles, wordt een toevallige fles met een extreme inhoud afgezwakt door de andere flessen in de steekproef. Om een even extreem resultaat te krijgen als met één enkele fles, moet je al 6 even extreme flessen hebben. Die kans is erg klein. Hoe groter de steekproef, hoe sterker dit afzwakken van de extremen speelt.
5. Zie de schermplaatjes hieronder.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=normalpdf(X,
498,3)
\Y2=normalpdf(X,
498,3/√(6))
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```

```
WINDOW
Xmin=488
Xmax=508
Xscl=1
Ymin=-.01
Ymax=.35
Yscl=.1
Xres=1
```



6. De kans dat het gemiddelde van het pak met zes flessen kleiner is dan 495 ml is 0,72%.
- 7.



8. Op het schermplaatje hieronder zie je hoe je die bovengrens vindt.

```
invNorm(.975,0,1)
1.959963986
invNorm(.975)
1.959963986
```

9. De standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van een steekproef van n flessen is $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. De bovengrens van het gebied op de grafiek hierboven is dan $499 = 498 + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Hieruit volgt:

$$1 \geq 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

10. Uit de zo pas gevonden ongelijkheid vinden we met $\sigma = 3$ dat n minstens 35 moet zijn.

Werkblad 5

Ben ik groter dan mijn grootvader?

Mensen worden almaar langer. Hiermee bedoelt men niet dat ieder van ons steeds blijft groeien, maar dat de gemiddelde lengte, bv. van alle Belgische mannen, gedurende de laatste decennia (eeuwen) toegenomen is. In 1950 was een 18-jarige van 1m80 echt groot, terwijl dat nu niet meer uitzonderlijk is. In deze opgave proberen we individuele lengten nu en vroeger te vergelijken.

In 2000 was Jeroen, een 18-jarige jongeman, 1m89 groot. Zijn grootvader was 18 jaar in 1950 en was toen 1m80 groot. Uiteraard is Jeroen groter dan zijn grootvader. Maar hoe zit dat in vergelijking met de rest van de bevolking?

De lengte van jongens van een bepaalde leeftijd is normaal verdeeld. Het Belgische leger houdt veel statistieken bij van de militairen (en vroeger dus van bijna alle ongeveer 18-jarige jongemannen). Uit deze cijfers weten we dat in 1950 de gemiddelde lengte van de 18-jarige jongens 170,0 cm is met standaardafwijking 5,6. In 2000 was het gemiddelde 176,1 cm met standaardafwijking 7,7.

1. Schets beide normale verdelingen op je blad en duid er de lengten van de kleinzoon en de grootvader op aan.
2. Om te kunnen vergelijken kun je kijken naar de afwijking t.o.v. het gemiddelde. Wie is volgens dit criterium het grootst?
3. Is dit een goede manier van vergelijken? Waar hou je geen rekening mee?
4. Een andere mogelijkheid is de afwijking van het gemiddelde te vergelijken met de standaardafwijking. Wie van beide is volgens dit criterium het grootst?
5. Je kunt ook voor beide personen hun plaats in de totale populatie bekijken. Je berekent daartoe het percentage 18-jarigen dat kleiner is dan Jeroen (resp. zijn grootvader). Wie is volgens dit criterium het grootst?

Opmerking: In vraag 4 vergeleken we de afwijkingen van het gemiddelde met de standaard-afwijking. Het getal dat je zo berekende, noemt men de *z-score*: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

Werkblad 6

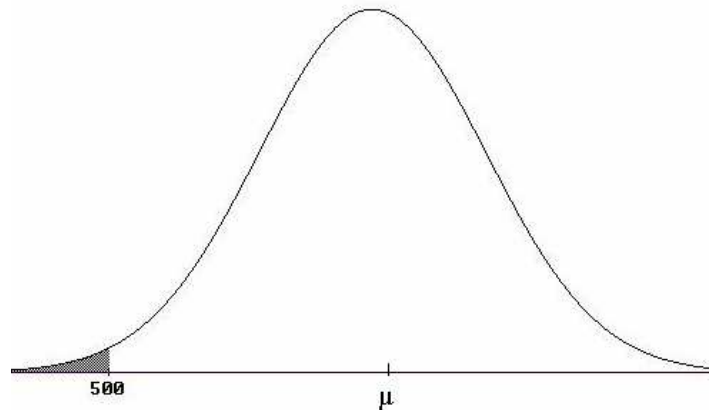
Dozen erwten vullen

Sommige klanten van een warenhuis hebben het vermoeden dat de dozen erwten van 500 gram van een bepaald merk te weinig wegen. Iemand beweert zelfs dat een vijfde van de pakken minder dan 500 gram weegt. Een verbruikersorganisatie neemt een steekproef van 1000 pakken. Het gemiddelde gewicht blijkt 502 gram te zijn. De standaardafwijking bedraagt 8 gram. We mogen aannemen dat het gewicht van de dozen erwten normaal verdeeld is.

1. Maak een grafiek van de normale verdeling van het gewicht van de dozen erwten.
2. Hoeveel procent van de pakken uit de steekproef heeft een gewicht van minder dan 500 gram?

De ondernemer die de erwten verpakt, wil geen nieuwe klacht. Hij wil dat hoogstens 1% van de pakken te weinig weegt. Hij weet dat de vulmachine een gewicht aflevert dat normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 8 gram. Het gewicht dat aangeduid wordt als vulgewicht is ook ongeveer het gemiddelde gewicht van de gevulde dozen. De vraag is op welk gewicht de ondernemer de machine moet afstellen opdat slechts 1% van de dozen een gewicht zou hebben beneden de 500 gram.

We moeten dus μ zoeken zo dat de gearceerde oppervlakte in de onderstaande figuur 0,01 is.



Hiervoor is er geen commando op het rekenoestel. Bij de commando's voor de normale verdeling heb je steeds het gemiddelde nodig. Met de 'solver' op je rekenoestel kunnen we μ wel vinden.

3. Schrijf de voorwaarde waaraan μ moet voldoen eens op met de notaties van je rekenoestel.

Om deze vergelijking door de rekenmachine te laten oplossen, kies je '0:Solver' onder de toets [MATH]. Deze opdracht kan enkel vergelijkingen met rechterlid 0 oplossen. Voer de juiste vergelijking in (kies X i.p.v. μ als onbekende) en druk vervolgens op [ENTER]. In het schermpje dat dan verschijnt, vul je een gok voor de oplossing in bij X en pas je bij 'bound' de grenzen aan waarbinnen het rekenoestel naar een oplossing moet zoeken. (Hier weten we bv. dat de oplossing die we zoeken zeker groter is dan 500 en als bovengrens kunnen we bv. 550 nemen.)

```
NUM CPX PRB
4: J(
5: *J
6: fMin(
7: fMax(
8: nDeriv(
9: fnInt(
0: Solver...
```

```
EQUATION SOLVER
eqn: 0=normalcdf(
-e99,500,X,8)-.0
1
```

```
normalcdf(-e9...=0
X=520
bound=(500,550)
```

Zet de cursor vervolgens terug bij het getal dat je bij X invulde en druk op [ALPHA] [SOLVE].

```
normalcdf(-E9,=0
▪ X=518.61077599...
  bound=(500,550)
▪ left-rt=1E-14
```

Zo vinden we de oplossing van de vergelijking en dus het gevraagde gemiddelde.

4. Ga na dat bij dit gemiddelde slecht 1% van de dozen een gewicht heeft beneden de 500 gram.