

Werktekst 3: Recursief migreren

In een zeker gebied wonen 3 000 000 mensen. Het gebied bestaat uit een centraal gelegen grote stad met daaromheen een uitgestrekt platteland. Op dit ogenblik wonen er 1 000 000 mensen in de stad en 2 000 000 op het platteland. We geven deze beginsituatie weer m.b.v. de kolommatrix

$$X(0) = \begin{bmatrix} s(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 \\ 2\,000\,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow s \\ \leftarrow p \end{array}$$

Mensen verhuizen van de stad naar het platteland en omgekeerd. De verhuisbewegingen, gemeten over periodes van 10 jaar, worden weergegeven door de onderstaande migratiematrix P :

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} s & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} s \\ p \end{array} \text{ naar} \end{array}$$

De bevolking in stad en platteland na n periodes van 10 jaar geven we weer door

$$X(n) = \begin{bmatrix} s(n) \\ p(n) \end{bmatrix}.$$

1. Laat aan de hand van een matrixberekening zien dat

$$\begin{cases} s(n) = 0,9 \cdot s(n-1) + 0,2 \cdot p(n-1) \\ p(n) = 0,1 \cdot s(n-1) + 0,8 \cdot p(n-1) \end{cases}$$

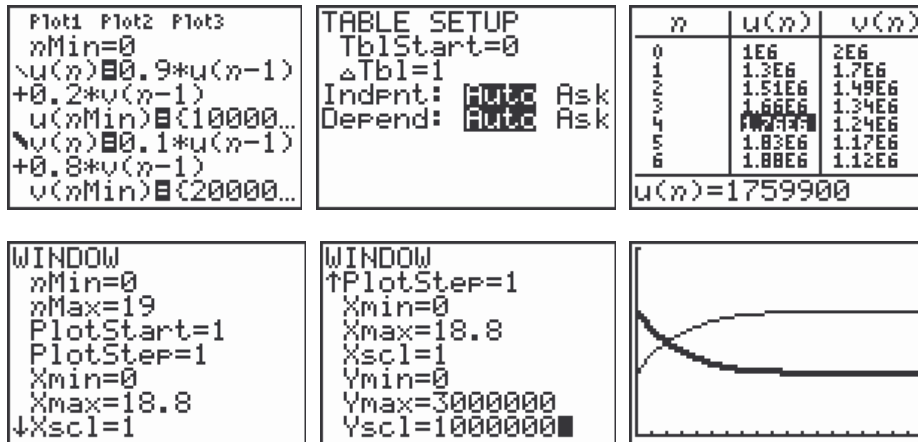
De uitdrukking hierboven is een *stelsel van twee (gekoppelde) recursieve vergelijkingen*: de waarde van s en p na een aantal periodes wordt uitgedrukt in functie van de waarden van s en p één periode eerder. Om de waarde van s na n periodes te kennen heb je zowel de waarde van s als die van p na $n-1$ periodes nodig.

2. Voer de twee recursieve voorschriften uit de vorige vraag in in je rekenmachine. Laat een tabel en een grafiek maken die de evolutie van de bevolking van de stad en het platteland weergeven. Beschrijf de evolutie van de bevolking in stad en platteland in woorden. Maak ook een uv-grafiek.
3. Waag, op basis van het antwoord op de vorige vraag, een ‘gefundeerde gok’ voor een expliciet voorschrift voor $s(n)$. In je voorstel mogen nog parameters voorkomen.
4. Geef, gebruik makend van je antwoord op de vorige vraag, een expliciet voorschrift voor $p(n)$.
5. Bepaal de waarde van de onbekende parameter(s) in de uitdrukkingen uit vraag 3 en 4 door je ‘gefundeerde gok’ in te vullen in het stelsel recursieve vergelijkingen.
6. Bepaal op dezelfde manier een expliciete formule voor evolutie van de bevolking in stad en platteland voor een gebied waarvan de beginpopulatie en de overgangsmatrix gegeven worden door

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2\,500\,000 \\ 1\,500\,000 \end{bmatrix} \text{ en } P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Antwoorden op werktekst 3

- Schrijf $X(n) = P \cdot X(n-1)$ voluit.
- De onderstaande schermafdrukken tonen hoe het met de rekenmachine in zijn werk gaat. Vergeet niet te controleren of de grafiekoptie TIME ingesteld is. We zien dat de bevolking in de stad vertraagd toeneemt van 1 000 000 in het begin naar 2 000 000 op lange termijn. De bevolking op het platteland daalt vertraagd van 2 000 000 in het begin naar 1 000 000 op lange termijn.



Voor de uv-grafiek moet je de grafiekoptie UV instellen.



- Op basis van de limietwaarde (2 000 000), de beginwaarde (1 000 000) en het vertraagd stijgende verloop, lijkt $s(n) = -1\,000\,000 \cdot g^n + 2\,000\,000$, met g een getal tussen 0 en 1, een verantwoorde gok.)
- Maak gebruik van het feit dat de totale bevolking steeds uit 3 000 000 personen bestaat. Je vindt $p(n) = 1\,000\,000 \cdot g^n + 1\,000\,000$.
- Als je de uitdrukkingen invult in het eerste recursieve voorschrift, vind je

$$\begin{aligned}
 -1\,000\,000 g^n + 2\,000\,000 &= \\
 &= 0,9 \cdot (-1\,000\,000 g^{n-1} + 2\,000\,000) + 0,2 \cdot (1\,000\,000 g^{n-1} + 1\,000\,000) .
 \end{aligned}$$

Na vereenvoudiging geeft dit $g^n = 0,7 g^{n-1}$, waaruit we afleiden dat $g = 0,7$. Het tweede recursieve voorschrift klopt daarmee meteen ook.

- $s(n) = 100\,000 \cdot 0,5^n + 2\,400\,000$ en $p(n) = -100\,000 \cdot 0,5^n + 1\,600\,000$