

Antwoorden

1. De tabel met bevolkingsaantallen is niet moeilijk te begrijpen. We zullen gebruik maken van de bevolkingsaantallen volgens geslacht en leeftijdsklassen van 1 jaar (de cijfers die in het midden van bladzijde 114 beginnen). De indeling volgens burgerlijke staat zullen we niet gebruiken.

De sterftetafels zijn wat minder gemakkelijk. Merk vooreerst op dat het blad in twee verdeeld is: een eerste deel van 0 tot 52 jaar en een tweede deel vanaf 53 jaar. We bekijken p. 27. Op basis van de overlijdens in de jaren 2000, 2001 en 2002 heeft men bepaald dat de kans dat, bijvoorbeeld, een 17-jarige jongen sterft in de loop van één jaar tijd gelijk is aan 0.000 614 (2^{de} kolom). De kans dat een 17-jarige nog minstens één jaar blijft leven is dus 0.999 386 (3^{de} kolom). De 4^{de} kolom en 5^{de} kolom horen bij elkaar. Bovenaan in de 4^{de} kolom zie je 1 000 000 staan. Dat betekent dat we vertrekken met een (fictieve) groep van 1 000 000 jongens die op een bepaald ogenblik geboren worden. Deze groep blijven we volgen. In de loop van hun eerste levensjaar sterven er 4240 jongetjes (cfr. 5^{de} kolom). Dan blijven er 995 760 leven. In de tabel staat 995 761. Dat heeft te maken met afrondingsperikelen. Van die 995 761 sterven er in de loop van hun tweede levensjaar 1128 (heel wat minder dan tijdens het eerste levensjaar!) zodat er nog 994 633 overblijven. Enzovoort. Uiteraard zijn er verbanden tussen de kolommen. Je kan bijvoorbeeld berekenen hoeveel van onze fictieve groep van 1 000 000 personen sterft op 17-jarige leeftijd door de sterftkans te vermenigvuldigen met het aantal personen dat de leeftijd van 17 haalt: $991\,367 \times 0.000\,614 = 608.699... \approx 609$. De laatste kolom zullen we niet gebruiken.

Bij de vruchtbaarheidscijfers lezen we, bijvoorbeeld, af dat een 25-jarige vrouw in 1997 gemiddeld 0.1111 kinderen ter wereld bracht. In mensentaal: van de 25-jarige vrouwen bracht gemiddeld 1 op de 9 een kind ter wereld in de loop van deze periode van één jaar.

2. Dit is rechtstreeks af te lezen uit de tabel met de bevolkingsaantallen op 1 januari 2003: 77 276.
3. Deze vrouwen waren 31 jaar oud op 1 januari 2003. Uit de tabel met de bevolkingsaantallen op 1 januari 2003 lezen we af dat er 73 462 van die vrouwen waren. In de loop van de vier jaar tussen 1 januari 2003 en 1 januari 2007 kunnen deze vrouwen overlijden. De kans dat zo'n 31-jarige vrouw nog leeft op 1 januari 2004 is 0.999 487. We hebben dus $73\,462 \times 0.999\,487 = 73\,424.31... \approx 73\,424$ 32-jarige vrouwen op 1 januari 2004. Zo gaan we jaar per jaar verder en vinden

$$73\,462 \times 0.999\,487 \times 0.999\,511 \times 0.999\,490 \times 0.999\,419 \approx 73\,308$$

35-jarige vrouwen op 1 januari 2007.

4. Er zijn heel wat elementen waar we bij de berekening rekening mee moeten houden:
- Een jongen die 3 jaar oud is op 1 januari 2009 is geboren in de loop van het jaar 2005 (en niet 2006!). Immers, een jongen die geboren wordt in 2005 viert zijn 3^{de} verjaardag in de loop van 2008 en is dus 3 jaar op 1 januari 2009.
 - De moeder van die jongen was 15, 16, 17, ... of 49 jaar op 1 januari 2005.
 - De moeder van die jongen was dus 13, 14, 15, ... of 47 jaar op 1 januari 2003.
 - De jongens kunnen sterven tussen hun geboorte en 1 januari 2009.
 - De potentiële moeders kunnen sterven tussen 1 januari 2003 en 1 januari 2005.
 - Niet alle kinderen die geboren worden, zijn jongens.

De volledige berekening gaat als volgt. Eerst berekenen we het aantal vrouwen dat 15 jaar is op 1 januari 2005:

$$61\,297 \times 0.999\,778 \times 0.999\,848.$$

Om het aantal kinderen te kennen dat in 2005 geboren wordt uit een moeder van 15 jaar, vermenigvuldigen we dit getal met het vruchtbaarheidscijfer van de 15-jarigen:

$$61\,297 \times 0.999\,778 \times 0.999\,848 \times 0.0008.$$

Nu moeten we weten hoeveel van die kinderen jongens zijn. Je weet misschien wel dat er niet evenveel jongens als meisjes geboren worden. Op basis van onze gegevens is de beste schatting die we kunnen maken de verhouding van het aantal 0-jarige jongens in 2002 over het totale aantal 0-jarige kinderen:

$$\frac{57\,076}{57\,076 + 54\,245}.$$

Zo vinden we het aantal jongens dat in 2005 geboren wordt uit een moeder van 15 jaar:

$$61\,297 \times 0.999\,778 \times 0.999\,848 \times 0.0008 \times \frac{57\,076}{57\,076 + 54\,245}.$$

Als we nu nog rekening houden met de kans dat zo'n jongen sterft vóór 1 januari 2009, vinden we het aantal 3-jarige jongens op 1 januari 2009 die geboren werden uit een moeder van 15 jaar:

$$61\,297 \times 0.999\,778 \times 0.999\,848 \times 0.0008 \times \frac{57\,076}{57\,076 + 54\,245} \times 0.995\,760 \times 0.998\,868 \times 0.999\,567.$$

Nu moeten we nog een gelijkaardige berekening maken voor de andere leeftijden van de moeders: 16, 17, ... tot 49 jaar en alle resultaten optellen. Gelukkig stond er in de opgave dat je niet alles hoeft te rekenen!

5. We hebben steeds gewerkt met de overlevingskansen die gebaseerd zijn op de sterften van 2000 tot 2002, hoewel het in de berekening ging over de jaren 2003, 2004, ... tot 2008. Voor de vruchtbaarheidscijfers geldt hetzelfde: we hebben de vruchtbaarheidscijfers van 1997 gebruikt voor het jaar 2005. Het kan niet anders omdat het natuurlijk onmogelijk is om de vruchtbaarheidscijfers en overlevingskansen van, bijvoorbeeld, 2005 te kennen. We moeten er ons echter wel van bewust zijn dat we er dus impliciet van uitgaan dat de vruchtbaarheidscijfers en overlevingskansen constant blijven.
6. We kunnen de aantallen van 2043 *rechtstreeks* berekenen. Dan maken we berekeningen in de stijl van vraag 4, maar dan een heel stuk eenvoudiger. Nog eenvoudiger is het om eerst alle aantallen in 2023 te berekenen en daarna aan de hand van deze tussenresultaten de aantallen te berekenen voor 2043. Voor 2023 vinden we:
 - voor de 1^{ste} leeftijdsklasse: $2\,407\,368 \times 0.43 + 2\,842\,947 \times 0.34 + 2\,853\,329 \times 0.01 = 2\,030\,303.51$
 - voor de 2^{de} leeftijdsklasse: $2\,407\,368 \times 0.98 = 2\,359\,220.64$
 - voor de 3^{de} leeftijdsklasse: $2\,842\,947 \times 0.96 = 2\,729\,229.12$
 - voor de 4^{de} leeftijdsklasse: $2\,853\,329 \times 0.83 = 2\,368\,263.07$
 - voor de 5^{de} leeftijdsklasse: $1\,840\,102 \times 0.30 = 552\,030.6$

We hebben niet afgerond omdat we met deze getallen nog verder moeten rekenen. Voor 2043 hebben we dan

- voor de 1^{ste} leeftijdsklasse: $2\,030\,303.51 \times 0.43 + 2\,359\,220.64 \times 0.34 + 2\,729\,229.12 \times 0.01 \approx 1\,702\,458$
- voor de 2^{de} leeftijdsklasse: $2\,030\,303.51 \times 0.98 \approx 1\,989\,697$
- voor de 3^{de} leeftijdsklasse: $2\,359\,220.64 \times 0.96 \approx 2\,264\,852$
- voor de 4^{de} leeftijdsklasse: $2\,729\,229.12 \times 0.83 \approx 2\,265\,260$
- voor de 5^{de} leeftijdsklasse: $2\,368\,263.07 \times 0.30 \approx 710\,479$

Bemerk de grote overeenkomst in beide berekeningen (niet de resultaten, wel de werkwijze)!

7. De afhankelijkheidsratio is eenvoudig te berekenen op basis van de gegevens en de resultaten uit de vorige oefening:
 - voor 2003: 0.82

- voor 2023: 0.97
- voor 2043: 1.10

De afhankelijkheidsratio stijgt behoorlijk (met 34% om precies te zijn). Dat betekent dat elke economisch actieve persoon in de toekomst ongeveer een derde meer dan nu zal moeten bijdragen in de toekomst om de economisch niet-actieve personen te onderhouden (vergeet echter niet de beperkingen van onze aanpak: we laten migratie buiten beschouwing, we veronderstellen dat overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers constant zijn, we hebben de pensioenleeftijd niet opgetrokken, ...).

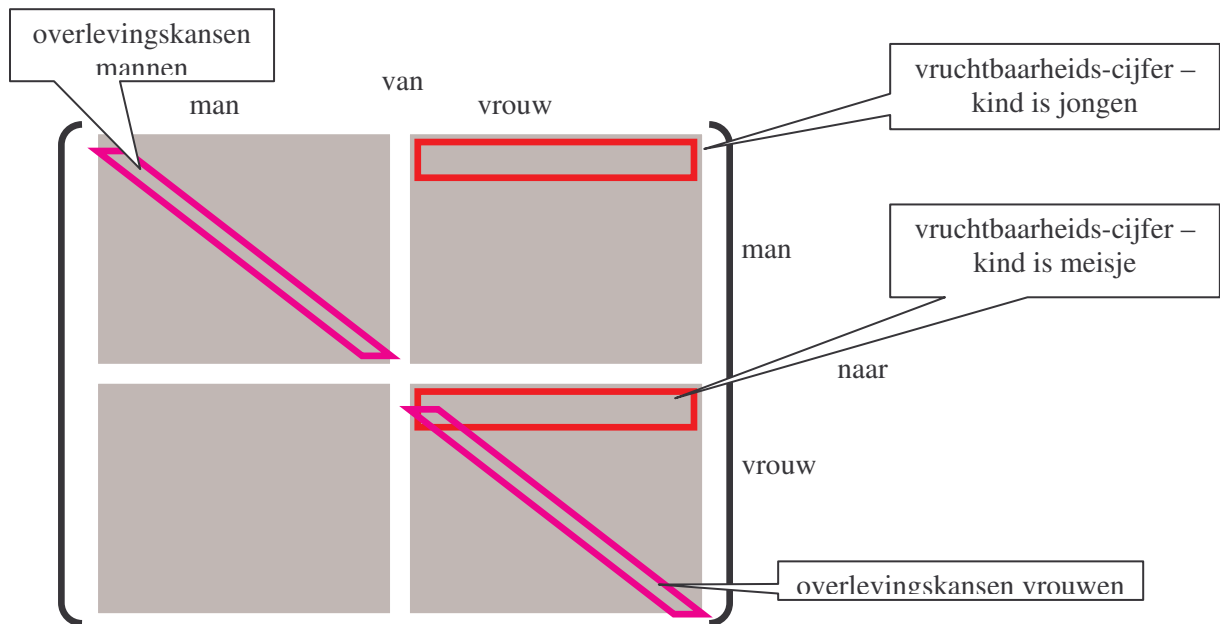
We zien dat de stijging van de afhankelijkheidsratio voornamelijk het gevolg is van de toename in de 4^{de} en de 5^{de} leeftijdsklasse. We zien de vergrijzing hier dus opduiken.

8. Met een grafische rekenmachine of een computer is dit snel gebeurd:

- stap voor stap: (gebruik de [ANS]-toets en herhaal het commando door [ENTER] te drukken)

- rechtstreeks:

9. De matrix wordt vooreerst heel wat groter. Er zijn 100 leeftijdsklassen en per leeftijdsklasse moeten we een onderscheid maken tussen mannen en vrouwen. Dat betekent dat de matrix 200 rijen en 200 kolommen moet tellen. In de matrix hieronder hebben we de matrix opgesplitst in 4 blokken van elk 100 rijen en 100 kolommen: een blok ‘van man naar man’, een blok ‘van man naar vrouw’, een blok ‘van vrouw naar man’ en een blok ‘van vrouw naar vrouw’. Binnen elk blok vinden we de 100 leeftijdsklassen terug. Het is niet moeilijk om de overlevingskansen in de matrix te plaatsen: onder de hoofddiagonaal binnen het blok ‘van man naar man’ komen de overlevingskansen van de mannen en analoog voor de vrouwen. Omdat de vruchtbaarheidscijfers nu uitsluitend betrekking hebben op de vrouwen, moeten ze in de blokken ‘van vrouw’ komen. De kinderen kunnen echter zowel van het mannelijke als het vrouwelijke geslacht zijn. Daarom moeten we de vruchtbaarheidscijfers opsplitsen (bijvoorbeeld volgens de verhouding die we in vraag 4 gebruikt hebben). Er komen dan vruchtbaarheidscijfers op de eerste rij van zowel het blok ‘van vrouw naar man’ als ‘van vrouw naar vrouw’.



10. We moeten beschikken over cijfers i.v.m. migratie (zowel immigratie in België als emigratie uit België) volgens leeftijd. Die cijfers moeten we dan gebruiken om een term toe te voegen:

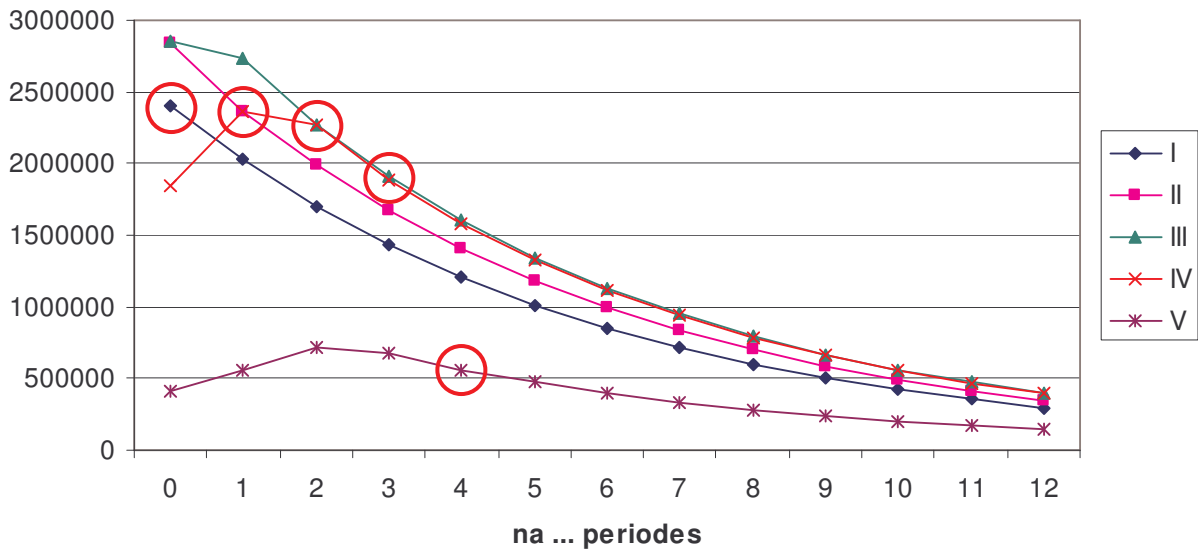
$$X_n = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_{n-1} + \begin{bmatrix} ?? \\ ?? \\ ?? \\ ?? \\ ?? \end{bmatrix}$$

Als we deze term M noemen, krijgen we de volgende berekening voor de bevolking in 2103 (E stelt de eenheidsmatrix voor):

$$\begin{aligned} X_5 &= L \cdot X_4 + M \\ &= L \cdot (L \cdot X_3 + M) + M \\ &= L^2 \cdot X_3 + (L + E) \cdot M \\ &= \dots \\ &= L^5 \cdot X_0 + (L^4 + L^3 + \dots + E) \cdot M \end{aligned}$$

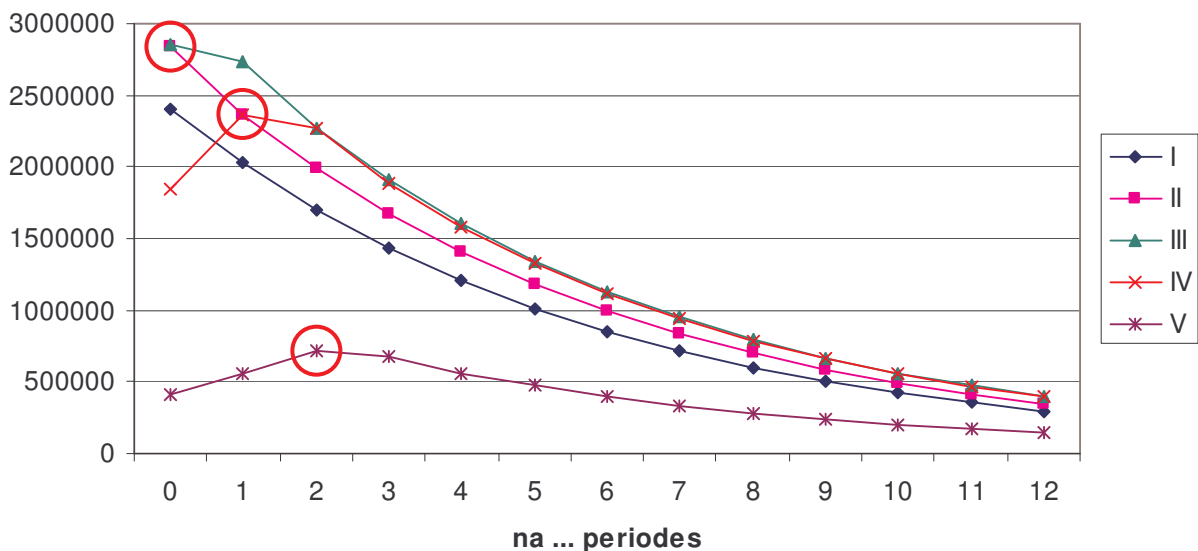
11. Het antwoord hangt af van je leeftijd op 1 januari 2003. Laten we aannemen dat je toen nog geen 20 jaar was. Op tijdstip 0 bevond je je dus in de eerste leeftijdsklasse. In de figuur komt dat overeen met het eerste punt van de blauwe grafiek (= de grafiek met het ruitje). In 2023, na 1 periode, bevind je je in de 2^{de} leeftijdsklasse. Je bent in de figuur dan ook naar een andere kromme overgegaan! Dit komt overeen met het tweede punt van de roze kromme (= de kromme met het vierkantje). Zo gaat het verder: na 2 periodes ben je te vinden op het derde punt van de groene kromme (= de kromme met het driehoekje), na 3 periodes op het vierde punt van de rode kromme (= de kromme met het kruisje) en na 4 periodes op het vijfde punt van de paarse kromme (= de kromme met het sterretje). En na 6 periodes ben je uit de grafiek verdwenen ... In de onderstaande figuur zijn alle punten waar je voorbijkomt nog eens apart aangegeven.

Evolutie per leeftijdsklasse



12. De babyboomers vormen op 1 januari 2003 bij benadering de 3^{de} leeftijdsklasse. Verder moet je redeneren zoals in de vorige vraag. We stellen vast dat we telkens in een maximum van de kromme terechtkomen, zoals te verwachten was.

Evolutie per leeftijdsklasse



13. We kunnen niet rechtstreeks met de groeipercentages werken (in het bijzonder: 16% gedeeld door 20 is NIET goed). We moeten via de groeifactoren werken. We zetten de groeifactor over een periode van 20 jaar om tot een groeifactor over een periode van één jaar:

$$0.84^{\frac{1}{20}} = 0.9913\dots$$

Hieruit leiden we af het jaarlijkse 'groei'percentage af: $0.9913\dots - 1 = -0.0087\dots = -0.87\%$.

14. De ongekeerde (en onbelangrijke) beginwaarde van de bevolking stellen we voor door x . Om de gevraagde halveringstijd te kennen, moeten we dan de onbekende t oplossen uit de vergelijking $x \cdot 0.84^t = 0.5x$. Dit geeft

$$t = \frac{\log 0.5}{\log 0.84} \approx 4.$$

De bevolking halveert dus ongeveer om de 80 jaar.

15. Kijk onderaan in de tabel. De ‘-16%’ moet veranderen in ‘0%’. Je kan het ook van de figuur aflezen. Het rechterdeel van de grafieken moet horizontaal zijn.
16. De lange-termijn-groefactor moet 1 zijn.
17. Om de doelstelling te bereiken, is het duidelijk dat de vruchtbaarheidscijfers omhoog moeten. We zouden dat kunnen proberen te bereiken met betere mogelijkheden om job en gezin te combineren, met hogere kinderbijslagen, met campagnes die het imago van het krijgen van kinderen verbeteren, ... Het is mogelijk om op die manier een stabiele bevolking te krijgen, bijvoorbeeld door het eerste vruchtbaarheidscijfer te verhogen van 0.43 tot 0.55 en het tweede van 0.34 tot 0.45. Maar dat is een verhoging met maar liefst 29.5%! Ter vergelijking: in 1960, vóór de komst van de anticonceptiepill, lag de vruchtbaarheid ongeveer 50% hoger dan nu. We zouden dus bijna terug deze cijfers moeten halen! Dat lijkt weinig realistisch.
18. We kunnen de overlevingskansen verhogen (bijvoorbeeld door grotere investeringen in de gezondheidszorg), in het extreme geval tot ze allemaal 1 zijn. Dat heeft een invloed op de lange-termijn-groefactor, maar de verandering blijft vrij klein
19. Het lukt om een stabiele bevolking te krijgen m.b.v. een zeer substantiële migratie, bijvoorbeeld door elke periode van 20 jaar (netto) 1 400 000 migranten aan te trekken in leeftijdsklasse II. Ter vergelijking: de laatste 5 jaar schommelde het migratiesaldo tussen 7000 en 28 000. Op basis daarvan kunnen we zeggen dat het huidige migratiesaldo over een periode van 20 jaar ongeveer op 250 000 ligt. Ook dit scenario lijkt dus niet realistisch.
20. Het verhogen van het vruchtbaarheidscijfer heeft een beperkt positief effect. Het verlagen van de overlevingskans van de 3^{de} leeftijdsklasse is zeer effectief, maar dat is natuurlijk niet het soort maatregelen dat we zouden willen doorvoeren. De substantiële (maar onrealistische) migratie uit vraag 19 levert wel soelaas. Er lijkt niets anders op te zitten dan het verhogen van de pensioenleeftijd. Als we de pensioenleeftijd verhogen tot de huidige theoretische pensioenleeftijd van 65 jaar halen we onze doelstelling bijna. Een verhoging van de pensioenleeftijd tot 63 jaar is voldoende als we rekening houden met het huidige niveau van migratie (migratiesaldo 250 000, waarbij de volgende verdeling realistisch lijkt: 50 000 in de 1^{ste} leeftijdsklasse, 100 000 in de 2^{de} leeftijdsklasse en 50 000 in de 3^{de} leeftijdsklasse).
21. Het gaat over de beginpopulaties waarin er geen personen onder de 60 jaar voorkomen. Deze populaties sterven uit.
22. a. Er zijn twee leeftijdsklassen. Eerder dan aan een menselijke populatie kun je hier denken aan aan populatie kleine vogels of zoogdieren, ingedeeld in jonge en volwassen dieren.
- b. De getallen op de eerste rij zijn vruchtbaarheidscijfers. Per dier in de eerste leeftijdsklasse worden er gemiddeld 0.4 dieren per tijdseenheid geboren en per dier in de tweede leeftijdsklasse worden er gemiddeld 1.2 dieren per tijdseenheid geboren. De 0.8 is een overlevingskans: 80% van de dieren uit de eerste leeftijdsklasse gaan over naar de tweede leeftijdsklasse en 20% sterft dus op één tijdseenheid.
- c. We moeten het stelsel $L \cdot X = 1.2 \cdot X$ oplossen, of voluit:

$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 1.2x \\ 0.8x = 1.2y \end{cases}$$

De oplossingen worden gegeven door $y = \frac{2}{3}x$. De oplossing waarvoor $x + y = 1$ is $x = 0.6$ en $y = 0.4$. Op de lange termijn zal de eerste leeftijdsklasse dus 60% van de totale bevolking uitmaken en de tweede leeftijdsklasse 40%.

- d. We kiezen een willekeurige beginpopulatie, bijvoorbeeld 1000 dieren in de eerste leeftijdsklasse en 1000 dieren in de tweede leeftijdsklasse (het werkt met bijna alle beginpopulaties, maar niet met allemaal; je moet dus wat geluk hebben). De resultaten van de berekeningen, die je in tabel 1 vindt, bevestigen het gegeven i.v.m. de lange-termijn-groefactor en de berekening uit vraag c.

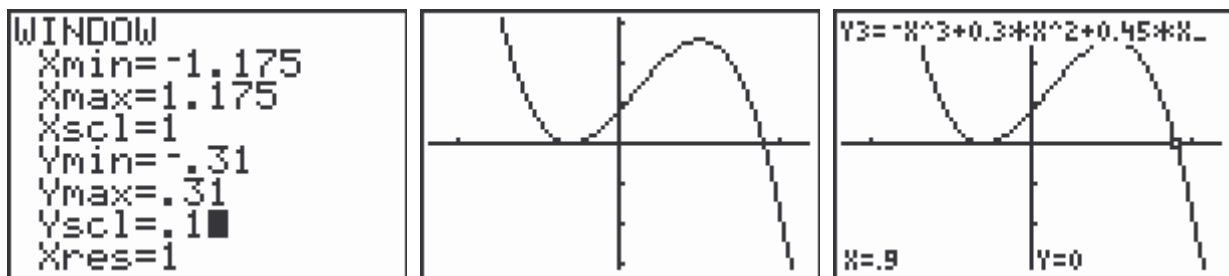
na ... periodes	aantallen			groefactoren		relatieve aandelen	
	I	II	totaal	I	II	I	II
0	1000.00	1000.00	2000.00			0.5000	0.5000
1	1600.00	800.00	2400.00	1.600000	0.800000	0.6667	0.3333
2	1600.00	1280.00	2880.00	1.000000	1.600000	0.5556	0.4444
3	2176.00	1280.00	3456.00	1.360000	1.000000	0.6296	0.3704
4	2406.40	1740.80	4147.20	1.105882	1.360000	0.5802	0.4198
5	3051.52	1925.12	4976.64	1.268085	1.105882	0.6132	0.3868
6	3530.75	2441.22	5971.97	1.157047	1.268085	0.5912	0.4088
7	4341.76	2824.60	7166.36	1.229698	1.157047	0.6059	0.3941
8	5126.23	3473.41	8599.63	1.180679	1.229698	0.5961	0.4039
9	6218.58	4100.98	10319.56	1.213091	1.180679	0.6026	0.3974
10	7408.61	4974.86	12383.47	1.191367	1.213091	0.5983	0.4017
11	8933.28	5926.89	14860.17	1.205797	1.191367	0.6012	0.3988
12	10685.58	7146.62	17832.20	1.196154	1.205797	0.5992	0.4008
13	12850.18	8548.46	21398.64	1.202572	1.196154	0.6005	0.3995
14	15398.23	10280.14	25678.37	1.198289	1.202572	0.5997	0.4003
15	18495.46	12318.58	30814.04	1.201142	1.198289	0.6002	0.3998
16	22180.48	14796.37	36976.85	1.199239	1.201142	0.5998	0.4002
17	26627.84	17744.39	44372.22	1.200508	1.199239	0.6001	0.3999
18	31944.40	21302.27	53246.67	1.199662	1.200508	0.5999	0.4001
19	38340.48	25555.52	63896.00	1.200226	1.199662	0.6000	0.4000
20	46002.81	30672.39	76675.20	1.199850	1.200226	0.6000	0.4000

Tabel 1

23. a. De lange-termijn-groefactor is een oplossing van de vergelijking $\det(L - \lambda E_3) = 0$. Dit geeft:

$$\det(L - \lambda E_3) = \det \begin{bmatrix} 0.3 - \lambda & 0.5 & 0.1 \\ 0.9 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.9 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 0.3\lambda^2 + 0.45\lambda + 0.081 = 0.$$

De lange-termijn-groefactor is de enige positieve oplossing van deze vergelijking, namelijk 0.9 (zie de onderstaande schermafdrucken).



- b. We moeten het stelsel $L \cdot X = 0.9 \cdot X$ oplossen, of voluit:

$$\begin{cases} 0.3x + 0.5y + 0.1z = 0.9x \\ 0.9x = 0.9y \\ 0.9y = 0.9z \end{cases}$$

De oplossingen worden gegeven door $z = y = x$. De oplossing waarvoor $x + y + z = 1$, is $x = 1/3$, $y = 1/3$ en $z = 1/3$. Op de lange termijn zullen de drie leeftijdsklassen dus even groot zijn.

- c. We kiezen een willekeurige beginpopulatie. De resultaten van de berekeningen, die je in tabel 2 vindt, bevestigen de antwoorden op de vragen a en b.

na ... perioden	aantallen			relatieve aantallen			groeipercentages		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
0	1000	2000	3000	16.7%	33.3%	50.0%			
1	1600	900	1800	37.2%	20.9%	41.9%	1.60	0.45	0.60
2	1110	1440	810	33.0%	42.9%	24.1%	0.69	1.60	0.45
3	1134	999	1296	33.1%	29.1%	37.8%	1.02	0.69	1.60
4	969	1021	899	33.6%	35.3%	31.1%	0.85	1.02	0.69
5	891	872	919	33.2%	32.5%	34.2%	0.92	0.85	1.02
6	795	802	785	33.4%	33.7%	33.0%	0.89	0.92	0.85
7	718	716	722	33.3%	33.2%	33.5%	0.90	0.89	0.92
8	645	646	644	33.3%	33.4%	33.3%	0.90	0.90	0.89
9	581	581	582	33.3%	33.3%	33.4%	0.90	0.90	0.90
10	523	523	523	33.3%	33.3%	33.3%	0.90	0.90	0.90

Tabel 2