De Belg: een bedreigde diersoort? Een matrixmodel voor de groei van de Belgische bevolking

1. Inleiding

Haast dagelijks worden we geconfronteerd met de nakende ‘vergrijzing’. In de toekomst zal onze bevolking voor een groter deel uit oudere mensen bestaan, wordt gezegd. Dat zal hoge kosten met zich meebrengen: voor het betalen van pensioenen, gezondheidszorgen, ... In deze tekst zullen we deze beweringen onderzoeken aan de hand van een wiskundig model dat we opstellen voor de evolutie van de Belgische bevolking en waarmee we voorspellingen maken voor de bevolkingsaantallen volgens de leeftijd.

We zullen niet alleen oog hebben voor deze problematiek uit de realiteit, maar ook aandacht besteden aan de wiskundige kant van de zaak. We zullen bijvoorbeeld eigenschappen van matrixmodellen ontmoeten en begrippen gebruiken die ook in andere contexten van toepassing zijn.

2. Voorspellen op ambachtelijke wijze

We willen de evolutie van het aantal inwoners in België voorspellen en we willen daarbij aandacht hebben voor de leeftijd van de inwoners. We zullen hierbij steunen op gegevens afkomstig van de website van het Nationaal Instituut voor de Statistiek (afgekort N.I.S.; je vindt deze gegevens eveneens in de bijgevoegde bestanden).

- Een eerste set gegevens betreft de *huidige bevolkingsaantallen*. Concreet beschikken we over de bevolkingsaantallen volgens leeftijd en geslacht op 1 januari 2003 (bij het schrijven van deze tekst waren dat de meest recente cijfers).
- We hebben ook gegevens over de sterfte, namelijk de *sterftetafels* (= sterftetabellen) die gemaakt zijn op basis van de overlijdens in de jaren 2000, 2001 en 2002. Er is een een aparte sterftetafel per geslacht (weet je waarom?).
- Voor de geboorten maken we gebruik van de *vruchtbaarheidscijfers* die gebaseerd zijn op de geboorten van 1997 (de meest recente cijfers die beschikbaar waren toen we deze tekst schreven!). De cijfers die we gebruiken zijn diegene die betrekking hebben op het jaar 1997 voor België (4de kolom in combinatie met de 1ste kolom).

We houden geen rekening met *migratie* (hoewel er op de website van het N.I.S. cijfers hierover te vinden zijn). We doen dat in de eerste plaats omdat het wiskundige model in dat geval een stuk ingewikkelder wordt. Het feit dat we in ons wiskundig model geen rekening houden met migratie zal er, een beetje paradoxaal, wel voor zorgen dat we een goed zicht krijgen op de rol die migratie kan spelen.

1. Bekijk de tabellen met gegevens nauwkeurig en probeer goed te begrijpen wat er precies voorgesteld is.

Gebruik de gegevens om de volgende vragen te beantwoorden. Vraag 2 is gemakkelijk, vraag 3 is wat moeilijker en vraag 4 is behoorlijk pittig. Bekijk achteraf zeker het antwoord op vraag 4.

2. Hoeveel mannen van 35 jaar oud waren er op 1 januari 2003?
3. Hoeveel vrouwen van 35 jaar oud zullen er zijn op 1 januari 2007?
4. Leg uit hoe je kunt berekenen hoeveel jongens van 3 jaar oud er op 1 januari 2009 zullen zijn. Je hoeft de berekeningen niet daadwerkelijk te maken!
5. Bij het beantwoorden van de bovenstaande vragen heb je een aantal vereenvoudigingen en benaderingen moeten maken. Beschrijf er enkele.

3. Een drastische vereenvoudiging

Vereenvoudigde gegevens

De berekeningen in de vorige paragraaf werden op den duur behoorlijk uitgebreid. Daarom vereenvoudigen we de situatie:

- We zullen voortaan werken met leeftijdsklassen van 20 jaar i.p.v. 1 jaar.
- We maken niet langer een onderscheid tussen mannen en vrouwen.
- We hebben de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen afgerond op twee decimalen.

Dat alles maakt het rekenwerk heel wat eenvoudiger. Anderzijds moeten we voor deze vereenvoudiging een prijs betalen. In de vorige paragraaf konden we (in principe) de evolutie van de bevolking van jaar tot jaar berekenen. Nu zullen we noodgedwongen moeten werken met stappen van 20 jaar. Deze worden bepaald door de leeftijdsklassen: we moeten iedereen in een bepaalde leeftijdsklasse de gelegenheid geven om naar de volgende leeftijdsklasse over te gaan.

We hebben de gegevens uit de vorige paragraaf omgezet tot gegevens die aangepast zijn aan de nieuwe vereenvoudigde setting. Net zoals in de vorige paragraaf krijgen we gegevens over de bevolkingsaantallen 'nu' (1 januari 2003), over sterften en over geboorten. De set gegevens is nu heel wat minder uitgebreid. Alles past namelijk in de tabel hieronder!

leeftijd	1 jan. 2003	vruchtbaarheidscijfer	overlevingskans
0-19	2 407 368	0.43	0.98
20-39	2 842 947	0.34	0.96
40-59	2 853 329	0.01	0.83
60-79	1 840 102	0	0.30
80-99	410 944	0	0
TOTAAL	10 354 690		

Tabel 1

Misschien ben je wel verwonderd over de hoge waarde van het vruchtbaarheidscijfer van de eerste leeftijdsklasse. Je moet bovendien bedenken dat het nu gaat over het aantal geboorten per *persoon*. Als we per vrouw zouden rekenen, dan zou er ruwweg het dubbele moeten staan. Dat betekent dat er per vrouw uit de eerste leeftijdsklasse (waarbij dus, bijvoorbeeld, ook de 'vrouwen' van 5 jaar oud meegerekend zijn!) gemiddeld bijna één kind geboren wordt. Betekent dit dat er een fenomenaal aantal tienerzwangerschappen zijn? Helemaal niet! We werken nu met stappen van 20 jaar en dat dus gaat het nu over het aantal geboorten over een periode van 20 jaar i.p.v. 1 jaar. Met andere woorden: deze geboortes grijpen plaats in een periode van 20 jaar. De 5-jarige 'vrouw' van daarnet heeft dus tijd tot haar 25-ste om haar kind te baren! De ouders van het kindje dat geboren wordt, hebben met andere woorden niet een leeftijd tussen 0 en 20 jaar, zoals we aanvankelijk misschien dachten, maar tussen 0 jaar (wanneer een 0-jarige in het begin van de periode een kindje krijgt, maar dat zal in de praktijk natuurlijk niet voorkomen) en 39 jaar (wanneer een 19-jarige op het einde van de periode van 20 jaar een kindje krijgt).

Je ziet dat de laatste leeftijdsklassse stopt bij 99 jaar. Dat betekent dat we geen rekening houden met het feit dat er mensen zijn die ouder worden. Omdat het over een klein aantal gaat dat verwaarloosd wordt, geeft dit geen erg vertekend beeld van de realiteit.

Voorspellingen op basis van de vereenvoudigde gegevens

6. Bereken hoeveel mensen er zullen zijn in elke leeftijdsklasse op 1 januari 2043.

Afhankelijkheidsratio

We zouden speciale aandacht besteden aan de vergrijzing van de bevolking. Daarom onderzoeken we de zogenaamde *afhankelijkheidsratio*. Dat is het getal dat je krijgt als je het aantal economisch niet-actieven (personen die niet voor hun eigen inkomen instaan: kinderen, gepensioneerden, zieken, werklozen, ...) deelt door het aantal economisch actieven. In deze tekst zullen we er van uitgaan dat de economisch actieven de personen zijn in de 2de en de 3de leeftijdsklasse en dat de economisch niet-actieven de personen zijn uit de 1ste, 4de en 5de leeftijdsklasse. We maken dus opnieuw een aantal vereenvoudigingen: we doen alsof

- er in de 2de en 3de leeftijdsklasse geen studenten, werklozen, zieken, bruggepensioneerden, mensen zonder beroep, ... zijn,
- er geen enkele jongere is die voor zijn eigen inkomen instaat,
- er geen mensen zijn die hun beroep blijven uitoefenen na hun 60ste,
- ...

In feite werken we dus met een benaderende waarde voor de afhankelijkheidsratio. Deze afhankelijkheidsratio geeft een indicatie van de financiële inspanningen die door de maatschappij opgebracht moeten worden om kinderen en ouderen te onderhouden!

7. Hoe evolueert de afhankelijkheidsratio van 1 januari 2003 tot 1 januari 2043? Geef commentaar bij de cijfers die je vindt.

4. Een matrixmodel voor de evolutie van de bevolking

De gegevens in matrixvorm

De matrices

$$L = \begin{array}{c} \textit{van} \\ \begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \ \textit{naar}$$

en

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2\,407\,368 \\ 2\,842\,947 \\ 2\,853\,329 \\ 1\,840\,102 \\ 410\,944 \end{bmatrix}$$

zijn gevormd op basis van de gegevens uit de tabel. De matrix X_0 bestaat uit de huidige bevolkingsaantallen. De matrix L wordt een *Lesliematrix* genoemd, naar de bioloog Patrick Leslie die in 1945 de eerste was die de evolutie van een dierenpopulatie met een dergelijke matrix beschreef. In deze matrix vind je de gegevens die de verandering van de populatie bepalen:

- op de eerste rij vind je de vruchtbaarheidscijfers,
- onder de hoofddiagonaal staan de overlevingskansen.

De tekst die rond de matrix staat, helpt ons om te onthouden op welke plaats de getallen moeten komen. De overlevingskans 0.96 bijvoorbeeld staat in de kolom ‘van II’ en in de rij ‘naar III’. Deze overlevingskans geeft immers aan dat 96% van de personen die op een bepaald ogenblik in de 2^de^ leeftijdsklasse zitten, op een periode van 20 jaar, de overstap maken van de 2^de^ naar de 3^de^ leeftijdsklasse (gewoon doordat ze 20 jaar ouder worden; de overige 4% overlijden in deze periode). Ook de vruchtbaarheidscijfers kunnen we op deze manier bekijken. Het vruchtbaarheidscijfer van de 2^de^ leeftijdsklasse staat in de kolom ‘van II’ en in de rij ‘naar I’. We mogen de overgang hier niet zo letterlijk opvatten: geen enkele persoon kan immers werkelijk de overgang maken van de 2^de^ naar de 1^ste^ leeftijdsklasse. Wel is het zo dat zich van de persoon uit de 2^de^ leeftijdsklasse (de ouder) a.h.w. een nieuwe persoon ‘afsplitst’, die naar de 1^ste^ leeftijdsklasse gaat (het kindje).

Omdat de matrix L de overgangen tussen de leeftijdsklassen beschrijft, wordt L ook wel een *overgangsmatrix* genoemd. Lesliematrices zijn specifiek bedoeld voor het beschrijven van de evolutie van een populatie. Overgangsmatrices zijn algemener en worden gebruikt in allerlei situaties waarin overgangen tussen verschillende categorieën beschreven worden.

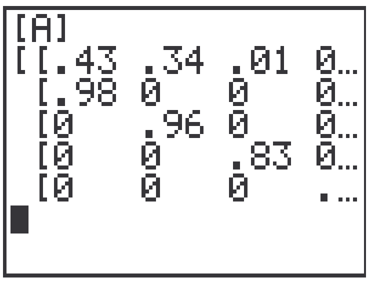
Voorspellen door matrices te vermenigvuldigen

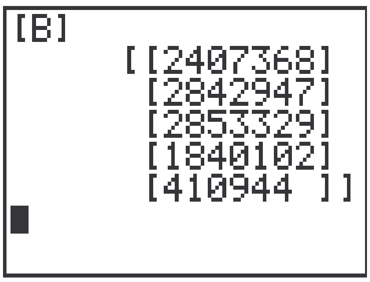
We maken nu de matrixproducten $X_1 = L \cdot X_0$ en $X_2 = L \cdot X_1$:

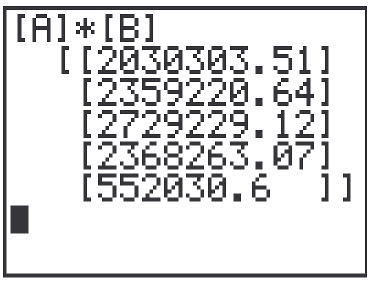
$$\begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\,407\,368 \\ 2\,842\,947 \\ 2\,853\,329 \\ 1\,840\,102 \\ 410\,944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.43 \cdot 2\,407\,368 + 0.34 \cdot 2\,842\,947 + 0.01 \cdot 2\,853\,329 \\ 0.98 \cdot 2\,407\,368 \\ 0.96 \cdot 2\,842\,947 \\ 0.83 \cdot 2\,853\,329 \\ 0.30 \cdot 1\,840\,102 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,030\,303.51 \\ 2\,359\,220.64 \\ 2\,729\,229.12 \\ 2\,368\,263.07 \\ 552\,030.6 \end{bmatrix}$$

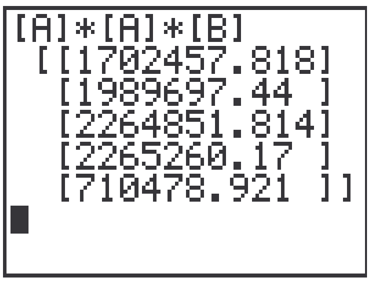
$$\begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\,030\,303.51 \\ 2\,359220.64 \\ 2\,729\,229.12 \\ 2\,368\,263.07 \\ 552\,030.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.43 \cdot 2\,030\,303.51 + 0.34 \cdot 2\,359\,220.64 + 0.01 \cdot 2\,729\,229.12 \\ 0.98 \cdot 2\,030\,303.51 \\ 0.96 \cdot 2\,359\,220.64 \\ 0.83 \cdot 2\,729\,229.12 \\ 0.30 \cdot 2\,368\,263.07 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1\,702\,458 \\ 1\,989\,697 \\ 2\,264\,852 \\ 2\,265\,260 \\ 710\,479 \end{bmatrix}$$

We stellen vast dat de berekeningen die we hiervoor moeten maken, dezelfde zijn als de berekeningen die we in vraag 7 gemaakt hebben! Het matrixproduct automatiseert m.a.w. de bewerkingen die we moeten maken om de bevolkingsaantallen in de toekomst te kennen. Deze matrixvermenigvuldigingen kunnen we heel snel met een grafische rekenmachine of computer laten maken:









Het is niet moeilijk om in te zien dat dit algemeen geldt. We stellen de bevolkingsaantallen na n stappen van 20 jaar voor door X_n. Dan kan je gemakkelijk aantonen dat

$$X_{n+1} = L \cdot X_n$$

voor elke $n \geq 0$ (schrijf het matrixproduct volledig uit, net zoals hierboven). Op deze manier kunnen we de bevolkingsaantallen *stap voor stap* berekenen: eerst de aantallen na 1 periode van 20 jaar, dan die na 2 periodes, dan die na 3 periodes, ... We kunnen de toekomstige bevolkingsaantallen echter ook *rechtstreeks* berekenen, zonder de aantallen van alle tussenliggende periodes te berekenen. Als we bijvoorbeeld de bevolkingsaantallen willen kennen voor 2103, kunnen we als volgt redeneren:

$$X_5 = L \cdot X_4 = L \cdot L \cdot X_3 = \ldots = L \cdot L \cdot L \cdot L \cdot L \cdot X_0 = L^5 \cdot X_0 .$$

In het algemeen: $X_n = L^n \cdot X_0$ voor elke $n \geq 0$.

8. Bereken de bevolkingsaantallen op 1 januari 2103 zowel stap voor stap als rechtstreeks.

Twee zijsprongetjes

9. Hoe zou je de originele gegevens (leeftijdsklassen van 1 jaar, mannen en vrouwen apart, …) omzetten in een matrixmodel?
10. Hoe zou het matrixmodel er uitzien indien je migratie wel in rekening zou brengen? Hoe zou je dan de bevolking op 1 januari 2103 berekenen?

Samenvatting

In deze paragraaf hebben we geleerd dat we de evolutie van de Belgische bevolking kunnen voorspellen a.d.h.v. matrices. De beginpopulatie stellen we voor door de kolommatrix

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2\,407\,368 \\ 2\,842\,947 \\ 2\,853\,329 \\ 1\,840\,102 \\ 410\,944 \end{bmatrix}.$$

De bevolking na n stappen stellen we ook voor door zo'n kolommatrix X_n. De vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen brengen we samen in een *overgangsmatrix* of *Lesliematrix*

$$\begin{array}{cc} & \textit{van} \\ & \begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \end{array} \\ L = & \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \quad \textit{naar} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array}$$

We kunnen de bevolkingsevolutie dan berekenen m.b.v. matrixbewerkingen, ofwel stap voor stap door herhaaldelijk de formule

$$X_{n+1} = L \cdot X_n$$

toe te passen, ofwel rechtstreeks vanuit de beginpopulatie door de formule

$$X_n = L^n \cdot X_0$$

te gebruiken.

5. De Belgische bevolking op langere termijn

Inleiding

Met behulp van het matrixmodel (5×5, zonder migratie) uit de vorige paragraaf hebben we de evolutie van de bevolking berekend tot 2243 (d.w.z. 12 stappen ver). De resultaten van de berekeningen vind je verderop in deze tekst onder de vorm van een tabel en een grafiek. Je kan ze gemakkelijk zelf narekenen met je rekenmachine of computer. In deze paragraaf zullen we de resultaten analyseren.

Maar eerst is het op zijn plaats om een relativerende opmerking te maken. Bij onze voorspellingen hebben we steeds dezelfde overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers gebruikt. De overlevingskansen zijn gebaseerd op gegevens van de jaren 2000, 2001 en 2002 en de vruchtbaarheidscijfers komen uit het jaar 1997. Het is absoluut niet realistisch om te veronderstellen dat deze cijfers 240 jaar constant zullen blijven. De afgelopen 240 jaar zijn ze alleszins serieus gewijzigd: de overlevingskansen zijn drastisch toegenomen en de vruchtbaarheidscijfers zijn sterk afgenomen. Bovendien, nogmaals: we laten migratie buiten beschouwing. De cijfers in de tabel mogen we dus alleszins niet bekijken als min of meer accurate voorspellingen van de toekomst.

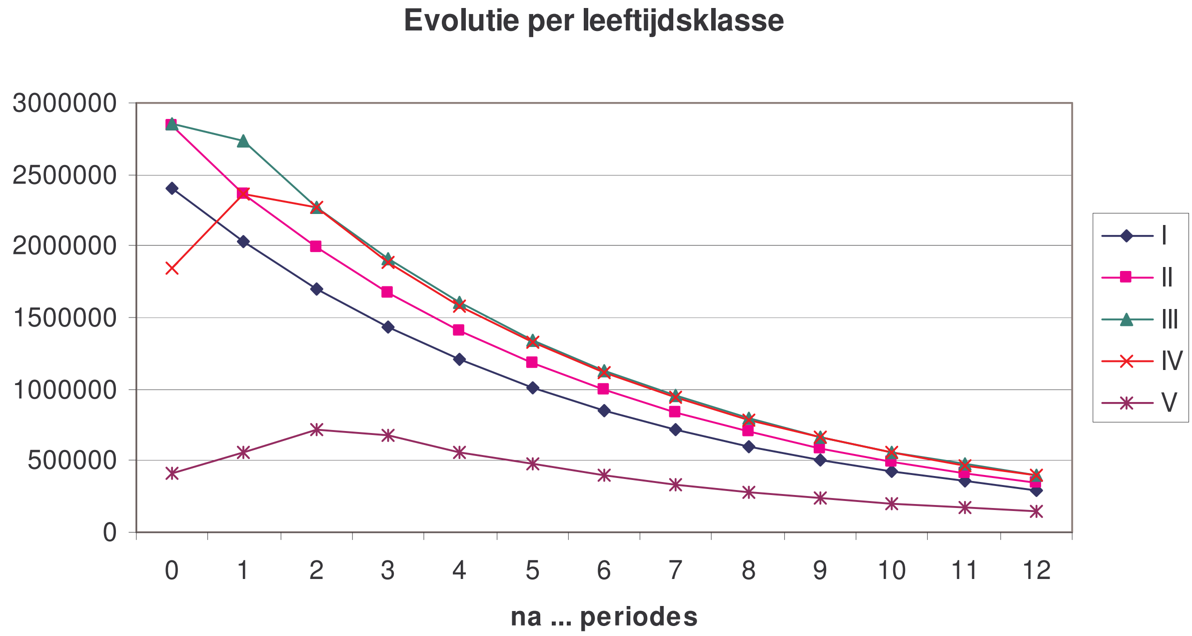
Toch heeft het zin om de voorspelling te maken, maar dan vanuit een ander perspectief. De overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers die we hanteren, zijn typische kenmerken van onze tijd. Door de berekeningen te maken, plaatsen we als het ware een vergrootglas op deze kenmerken en vragen we ons af waar het ons toe zou leiden als er geen wijzigingen zouden optreden in deze kenmerken. En we zullen zien dat dit toch wel een en ander aan de oppervlakte brengt.

De resultaten van de berekeningen

De beloofde tabel en grafiek met de evolutie van de Belgische bevolking van 2003 tot 2143 (op basis van het model uit de vorige paragraaf) vind je hieronder. Je merkt al dadelijk dat het er op de lange termijn niet zo goed uitziet voor de Belgen ...

na … periodes		0-19 (I)	20-39 (II)	40-59 (III)	60-79 (IV)	80-99 (V)	totaal
0	2003	2 407 368	2 842 947	2 853 329	1 840 102	410 944	10 354 690
1	2023	2 030 304	2 359 221	2 729 229	2 368 263	552 031	10 039 047
2	2043	1 702 458	1 989 697	2 264 852	2 265 260	710 479	8 932 746
3	2063	1 431 203	1 668 409	1 910 110	1 879 827	679 578	7 569 126
4	2083	1 201 777	1 402 578	1 601 672	1 585 391	563 948	6 355 367
5	2103	1 009 658	1 177 742	1 346 475	1 329 388	475 617	5 338 880
6	2123	848 050	989 464	1 130 632	1 117 575	398 816	4 484 537
7	2143	712 386	831 089	949 886	938 424	335 272	3 767 057
8	2163	598 395	698 138	797 845	788 405	281 527	3 164 310
9	2183	502 655	586 427	670 212	662 211	236 522	2 658 027
10	2203	422 229	492 602	562 970	556 276	198 663	2 232 740
11	2223	354 673	413 784	472 898	467 265	166 883	1 875 503
12	2243	297 925	347 579	397 233	392 505	140 179	1 575 422

Tabel 2



Figuur 1

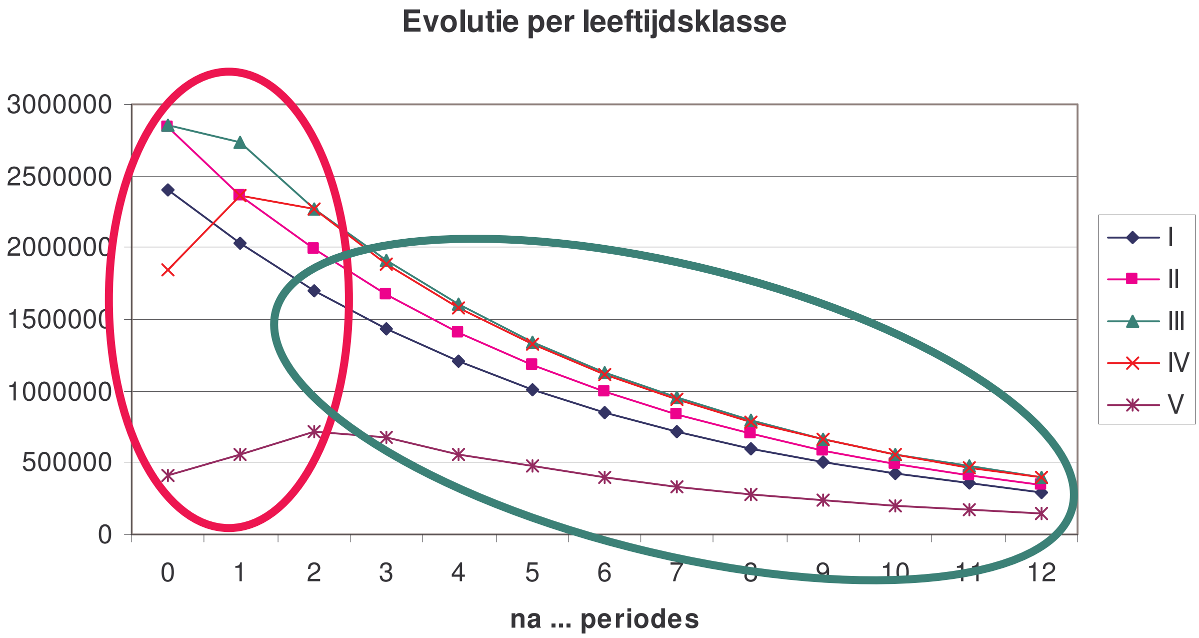
De (relatief) korte termijn

11. Waar bevind jij je in deze grafiek?
12. Tussen 1945 en 1965 werden heel veel kinderen geboren. De mensen die toen geboren werden, worden wel eens de 'babyboomers' genoemd. Je kan ze goed terugvinden in de grafieken. Leg uit waaraan je de doortocht van de babyboomers herkent.

De lange termijn

Met de vorige twee vraagjes hadden we aandacht voor de evolutie van de bevolking op relatief korte termijn, laat zeggen de eerste drie of vier periodes. In die tijd spelen de kenmerken van de beginpopulatie een grote rol. De doortocht van de babyboomers vormt daar een goed voorbeeld van. Dat leidt tot onregelmatigheden in de evolutie: als we één leeftijdsklasse volgen zien we zowel stijging als daling en als we de verschillende leeftijdsklassen onderling vergelijken, zijn er grote verschillen.

Na de doortocht van de babyboomers echter vertonen de grafieken een zeer grote regelmaat. Ze lijken ook zeer goed op elkaar. Elke kromme verloopt vertraagd dalend. De invloed van de beginpopulatie lijkt nu sterk gereduceerd. In de onderstaande figuur zijn beide delen van de grafiek nog eens goed aangegeven.



Figuur 2

Wellicht heb je in de wiskundelessen al eerder grafieken met een dergelijke vorm ontmoet. Voorbeelden van functies waarvan de grafiek er zo uitziet, zijn $y = \frac{a}{x+b}$ (orthogonale hyperbool), $y = b \cdot g^x$ met $0 < g < 1$ (dalende exponentiële functie), ... Om nadere informatie in te winnen over het soort functie dat hier van toepassing is, gebruiken we de onderstaande tabel.

We leggen eerst uit hoe we aan de cijfers in de tabel komen. We doen dat aan de hand van het cijfer -15.7% dat je links bovenaan vindt. Dat getal betekent dat het aantal personen in de eerste leeftijdsklasse tussen 2003 en 2023 met 15.7% gedaald is (waarbij het percentage berekend wordt op basis van het aantal personen in deze leeftijdsklasse in het begin van de periode). We lezen dus in de tabel bijvoorbeeld ook af dat het aantal personen in de 5de leeftijdsklasse in 2043 met 28.7% toegenomen is in vergelijking met 2023.

	groeipercentages				
na … perioden	I	II	III	IV	V
0					
1	-15.7%	-17.0%	-4.3%	28.7%	34.3%
2	-16.1%	-15.7%	-17.0%	-4.3%	28.7%
3	-15.9%	-16.1%	-15.7%	-17.0%	-4.3%
4	-16.0%	-15.9%	-16.1%	-15.7%	-17.0%
5	-16.0%	-16.0%	-15.9%	-16.1%	-15.7%
6	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-15.9%	-16.1%
7	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-15.9%
8	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%
9	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%
10	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%
11	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%
12	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%	-16.0%

Tabel 3

De cijfers in de tabel vertellen ons hetzelfde verhaal als de grafieken. In het begin is onregelmatigheid troef, maar aan het einde van de tabel heerst grote regelmaat, zowel horizontaal als verticaal. De aantallen in elke leeftijdsklasse nemen in elke periode van 20 jaar steeds met 16% af. Het is nu wel duidelijk welke functies hier van toepassing zijn: als met een tijdseenheid een vaste procentuele afname correspondeert, hebben we te maken met exponentiële afname. Als er elke periode van 20 jaar 16% afgaat, blijft er telkens 84% over. Dat wil zeggen dat de groeifactor 0.84 is. We besluiten dat de grafieken in figuur 1 vanaf tijdstip 3 à 4 overeenstemmen met de grafiek van een exponentiële functie met grondtal 0.84.

Het is gemakkelijk in te zien dat de vaststelling die we gedaan hebben niet alleen opgaat voor de aantallen in elke leeftijdsklasse apart, maar ook voor de hele bevolking. Met andere woorden: op de lange termijn 'groeit' ook de totale Belgische bevolking exponentieel met groeifactor 0.84 per periode van 20 jaar.

Het getal 0.84 zullen we de *lange-termijn-groeifactor* van onze bevolking noemen.

13. Met hoeveel procent neemt de bevoling dan *per jaar* af (uiteraard tijdens de periode waarin de 'groei' bijna helemaal regelmatig gebeurt)?
14. Hoeveel tijd neemt een halvering van de bevolking in beslag?

Als we de puntjes op de i zetten, mogen we feitelijk niet zeggen dat we hier met een exponentiële functie te maken hebben. De grafieken in figuur 1 bestaan eigenlijk uit puntjes (die overeenkomen met gehele waarden van n), die alleen omwille van de leesbaarheid verbonden zijn door een lijntje. De grafiek van een exponentiële functie daarentegen is een ononderbroken lijn. In de wiskunde gebruikt men de woorden *continu* en *discreet* om het verschil aan te duiden: de situatie die we willen beschrijven is *discreet* (we hebben de bevolkingsaantallen alleen berekend na een geheel aantal stappen) terwijl de exponentiële functie een *continu* wiskundig object is (voor elke waarde van de tijd, ook niet-gehele waarden, is er een functiewaarde). Als we helemaal correct willen blijven, moeten we de exponentiële functies met grondtal 0.84 vervangen door hun discrete tegenhangers, namelijk de meetkundige rijen met reden 0.84. Vanaf een zeker ogenblik groeien de aantallen in elke leeftijdsklasse volgens een meetkundige rij met reden 0.84.

De getallen in tabel 3 zijn afgerond. De groeipercentages zijn in feite niet exact gelijk aan –16% en zijn ook niet helemaal constant. Naarmate de tijd verder gaat, worden de afwijkingen en de veranderingen echter kleiner en kleiner. De groei van de bevolking wordt dus niet helemaal exact, maar slechts benaderend beschreven door een exponentiële functie of een meetkundige rij. De benadering wordt wel steeds beter naarmate we de tijd laten vorderen.

We kunnen onze bevindingen op een compacte manier in symbolen uitdrukken: als n minstens 3 of 4 is, is

$$X_{n+1} \approx 0.84 \cdot X_n .$$

In het linkerlid staat een kolommatrix met daarin de bevolkingsaantallen na $n+1$ tijdseenheden. In het rechterlid staat (na uitwerking) een kolommatrix met daarin de bevolkingsaantallen na n tijdseenheden, allemaal vermenigvuldigd met 0.84. We hebben in deze paragraaf geleerd dat de overeenkomstige elementen van deze twee kolommatrices inderdaad bij benadering aan elkaar gelijk zijn. De matrix in het linkerlid kunnen we nog anders schrijven. Immers. $X_{n+1} = L \cdot X_n$ (zie paragraaf 4). Zo krijgen we:

$$L \cdot X_n \approx 0.84 \cdot X_n .$$

Samenvatting

We hebben in deze paragraaf vastgesteld dat de groei van de bevolking in het begin onregelmatig verloopt, maar dat op de lange termijn juist wel regelmaat te ontdekken valt in de groei. Meer bepaald hebben we vastgesteld dat zowel de totale Belgische bevolking als de aantallen in elk van de vijf leeftijdsklassen bij benadering groeien volgens een exponentiële functie of meetkundige rij. De lange-termijn-groeifactor is 0.84.

We kunnen dit symbolisch als volgt uitdrukken: als n minstens 3 of 4 is, is

$$X_{n+1} \approx 0.84 \cdot X_n .$$

of nog:

$$L \cdot X_n \approx 0.84 \cdot X_n \,.$$

6. Even stilstaan bij de bevindingen

In de vorige paragraaf hebben we kunnen vaststellen dat ons model een drastische afname van de Belgische bevolking voorspelt. Moeten we ons daar zorgen over maken? En hoe moeten we er (eventueel) iets aan doen? Met een dergelijke vraag wagen we ons buiten het vertrouwde terrein van de wiskunde en komen we op het gladde ijs van de sociale wetenschappen, de economie, de politiek, ... Er is in elk geval geen eenduidig antwoord op deze vraag. Sommigen wijzen er op dat de druk op ons leefmilieu afneemt als we met minder mensen zijn. Anderen maken zich meer zorgen over de daling, denkend aan de (on)betaalbaarheid van de vergrijzing die er mee gepaard gaat. Als we deze daling niet goed vinden, zijn er ook verschillende remedies denkbaar. De een ziet er een reden in om de Belgen aan te zetten om meer kinderen te krijgen, de ander vindt er juist argumenten in om (jonge) migranten aan te trekken.

7. Veranderingen simuleren

Een rekenblad

Ook rekenbladprogramma's op de computer (b.v. Excel) kunnen met matrices rekenen. In bijlage vind je het rekenblad *matrixmodel Belgische bevolkingsgroei.xls*. Met behulp van dit rekenblad zullen we onderzoeken wat het effect is van veranderingen in de parameters waar we mee gewerkt hebben. Maar eerst wat uitleg over het rekenblad.

In de gele cellen vind je vooreerst de Lesliematrix (met de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen die we in de vorige paragrafen gebruikt hebben) en de beginpopulatie. We hebben het model uitgebreid met een 6$^{\text{de}}$ leeftijdsklasse (van 100 tot 119 jaar), maar die is voorlopig nog niet benut. We gaan met het rekenblad ook een beetje buiten de grenzen van het model dat we in de vorige paragrafen opsteld hebben. We hebben bijvoorbeeld de mogelijkheid ingebouwd om rekening te houden met migratie. We werken met het migratiesaldo: het aantal immigranten (= inwijkelingen) min het aantal emigranten (= uitwijkelingen). Voor elke leeftijdsklasse kan een aantal opgegeven worden, dat dan gedurende de hele periode gelijk blijft. We hebben verder ook de pensioenleeftijd aangegeven. In het model dat we hanteren, ligt die op 60 jaar (cfr. de manier waarop we de afhankelijkheidsratio berekenen). De theoretische pensioenleeftijd in België is 65 jaar, maar in de praktijk gaan de meeste mensen veel eerder op pensioen.

Verder vind je in het rekenblad een aantal tabellen met

- de voorspellingen van de aantallen in alle leeftijdsklassen,
- de afhankelijkheidsratio,
- de groeipercentages voor elke periode, en
- cijfer waar we in de volgende paragraaf op ingaan

(alles berekend door de computer) en een aantal grafieken:

- de evolutie van de aantallen per leeftijdsklasse,
- de evolutie van de afhankelijkheidsratio.

Bekijk eerst eens even de afhankelijkheidsratio. In paragraaf 4 hebben we gezien dat de afhankelijkheidsratio heel sterk toeneemt tussen 2003 en 2043. Nu stellen we vast dat hij nadien stabiliseert, op een niveau dat lichtjes hoger is dan dat van 2043!

De inhoud van de gele cellen kunnen we veranderen. De andere cellen en de grafiek worden dan automatisch aangepast. Zo kunnen we onderzoeken wat het effect is van het veranderen van de beginaantallen, de vruchtbaarheidscijfers en/of de overlevingskansen, het migratiesaldo en de pensioenleeftijd. Over het doorrekenen van een hogere pensioenleeftijd moeten we wat meer uitleg geven. Als de pensioenleeftijd verhoogd wordt, dan rekenen we de 4^{de} leeftijdsklasse niet meer volledig bij de economisch niet-actieven. Als we de pensioenleeftijd bijvoorbeeld instellen op 65 jaar, dan rekenen we 25% van de 4^{de} leeftijdsklasse bij de economisch actieve bevolking en 75% van de 4^{de} leeftijdsklasse bij de economisch niet-actieve bevolking.

Je maakt best eerst een kopie van het rekenblad. Als je dan telkens op de kopie werkt, behoud je steeds het werkblad met de originele gegevens.

Ingrijpen met een doel voor ogen

Veronderstel dat we ons als doel stellen dat de bevolking op lange termijn moet stabiliseren (we maken er even abstractie van of dit al dan niet een wenselijke doelstelling is). We zullen onderzoeken of het mogelijk is om deze doelstelling te halen door de getallen in de gele cellen te veranderen. We zullen ons daarbij ook telkens proberen voor te stellen hoe we deze getallen in de realiteit zouden kunnen veranderen.

15. Waar zul je in het werkblad kunnen zien of je de doelstelling bereikt hebt?
16. Waaraan is de lange-termijn-groeifactor gelijk als je de doelstelling haalt?
17. Is het mogelijk om de doelstelling te bereiken door alleen de vruchtbaarheidscijfers te veranderen? Cijfertjes veranderen is natuurlijk gemakkelijk! Welke veranderingen zouden in de realiteit haalbaar zijn? En hoe zou je mensen stimuleren om hun gedrag in deze zin aan te passen?
18. Is het mogelijk om de doelstelling te halen door alleen de overlevingskansen te veranderen? Hoe zou je dat in de praktijk kunnen realiseren?
19. Is het mogelijk om de doelstelling te halen m.b.v. migratie alleen?

Een andere doelstelling die we ons zouden kunnen stellen, is dat de afhankelijkheidsratio naar beneden moet. We zouden bijvoorbeeld kunnen nastreven dat de afhankelijkheidsratio op termijn niet hoger dan 0.85 is.

20. Kun je dit doel bereiken door in te grijpen op de vruchtbaarheidscijfers en/of de overlevingskansen en/of migratie? Lukt het wanneer je de pensioenleeftijd verhoogt?

De beginpopulatie veranderen

Het is moeilijker om ons voor te stellen hoe we zouden kunnen ingrijpen op de beginpopulatie. Toch kunnen we (toegegeven, met een gezonde dosis fantasie) dergelijke scenario's verzinnen. En ze leren ons iets interessants.

We hadden bijvoorbeeld in de jaren voorafgaand aan 2003 éénmalig een grote groep jonge migranten kunnen aantrekken. De beginpopulatie zou dan groter geweest zijn. We kunnen de beginwaarde in de 2^{de} leeftijdsklasse bijvoorbeeld instellen op 4 000 000 (voor de rest keren we terug naar ons uitgangspunt dat er geen migratie is en nemen we terug de oorspronkelijke waarden voor de vruchtbaarheidscijfers, ...). Als we de proef op de som nemen, merken we dat deze eenmalige migratie wel veranderingen veroorzaakt op de korte termijn, maar dat de lange-termijn-groeifactor en de waarde die de afhankelijkheidsratio op lange termijn aanneemt, niet veranderen.

Veronderstel, als tweede voorbeeld, dat een verschrikkelijke epidemie in één klap alle mensen van 60 jaar en ouder doodt en dat alle jongere mensen gespaard blijven. Nadien evolueert de bevolking weer net als voorheen. Als we dit scenario onderzoeken met het rekenblad, merken we dat ook dit geen effect heeft op de lange-termijn-groeifactor.

Een belangrijke vaststelling

We hebben in de loop van deze paragraaf veel bijgeleerd over de rol van de verschillende factoren die de groei van de bevolking bepalen. Nu richten we de aandacht terug op de wiskundige facetten van de experimenten die we gedaan hebben.

In beide voorbeelden i.v.m. een gewijzigde beginpopulatie stellen we vast dat de lange-termijn-kenmerken van de populatie niet veranderen. Dat kunnen we in verband brengen met wat we in paragraaf 6 reeds aangegeven hebben: na een zekere tijd van onregelmatigheden komt een periode van regelmaat. De onregelmatigheden lijken te maken te hebben met de specifieke kenmerken van de beginpopulatie (babyboom, een grote golf migranten, geen ouderen, ...). In de fase van regelmaat die daar op volgt, lijkt de invloed van de beginpopulatie uitgewerkt. De kenmerken van deze fase lijken alleen bepaald te worden door de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen. We hebben het ook kunnen merken in de vragen in het begin van paragraaf 7: als we de lange-termijn-groeifactor willen veranderen, moeten we de vruchtbaarheidscijfers en/of de overlevingskansen aanpassen.

Samenvatting

De lange-termijn-groeifactor 0.84 lijkt volledig bepaald te worden door de overlevingskansen en de vruchtbaarheidscijfers en niet door de beginpopulatie.

21. Toch zijn er startpopulaties die op de lange termijn op een totaal andere manier evolueren dan de originele beginpopulatie, maar dit zijn in zekere zin uitzonderingen. Kun je ze vinden?

8. De leeftijdsverdeling

We keren terug naar tabel 2, de tabel met de voorspellingen voor de evolutie van de aantallen in de verschillende leeftijdsklassen. In de vorige paragrafen hebben we vooral aandacht gehad voor de *verticale* structuur in deze tabel. We hebben de regelmaat gevonden die de kolommen van de tabel beheerst: na verloop van tijd worden de getallen telkens 16% kleiner wanneer we een stap verder zetten in de tijd. Nu besteden we aandacht aan de *horizontale* structuur in de tabel: we onderzoeken hoe de verschillende leeftijdsklassen zich ten opzichte van elkaar verhouden.

In de onderstaande tabel zie je voor elke leeftijdsklasse op elk tijdstip hoeveel procent van de totale bevolking ze uitmaakt.

na ... periodes	0-19 (I)	20-39 (II)	40-59 (III)	60-79 (IV)	80-99 (V)
0	23.25%	27.46%	27.56%	17.77%	3.97%
1	20.22%	23.50%	27.19%	23.59%	5.50%
2	19.06%	22.27%	25.35%	25.36%	7.95%
3	18.91%	22.04%	25.24%	24.84%	8.98%
4	18.91%	22.07%	25.20%	24.95%	8.87%
5	18.91%	22.06%	25.22%	24.90%	8.91%
6	18.91%	22.06%	25.21%	24.92%	8.89%
7	18.91%	22.06%	25.22%	24.91%	8.90%
8	18.91%	22.06%	25.21%	24.92%	8.90%
9	18.91%	22.06%	25.21%	24.91%	8.90%
10	18.91%	22.06%	25.21%	24.91%	8.90%
11	18.91%	22.06%	25.21%	24.91%	8.90%
12	18.91%	22.06%	25.21%	24.91%	8.90%

Tabel 4

We stellen vast dat de percentages in het begin nogal wisselen, maar dat er na verloop van tijd (weeral!) rust optreedt. Dan vertegenwoordigt elke leeftijdsklasse een vast deel van de totale bevolking. We hebben vroeger vastgesteld dat de *(absolute) aantallen* steeds blijven veranderen, maar nu stellen we vast dat de *procentuele verdeling* van de leeftijden stabiliseert. We noemen deze leeftijdsverdeling-op-lange-termijn de *lange-termijn-leeftijdsverdeling* of de *stabiele leeftijdsverdeling*.

Het is niet moeilijk om dit fenomeen te verklaren vanuit de vaststellingen die we in de vorige paragrafen deden. Over één periode vermindert het aantal personen in een leeftijdsklasse met 16%. De totale bevolking neemt over deze periode eveneens met 16% af. Het aandeel van deze leeftijdsklasse in het geheel verandert dus niet! Het stabiliseren van de afhankelijkheidsratio, een andere vaststelling uit de voorgaande paragraaf, is hiermee meteen ook verklaard:

$$\frac{18.91\% + 24.91\% + 8.90\%}{22.06\% + 25.21\%} = 1.115\,295... \approx 1.12\,.$$

Ook hier verbergen de afrondingen dat de verdeling in feite niet helemaal constant is. In werkelijkheid is de leeftijdsverdeling nooit exact gelijk aan diegene die we hier de stabiele leeftijdsverdeling genoemd hebben, maar na een aantal stappen is ze er bij benadering aan gelijk en de benadering wordt steeds beter als we het aantal stappen opdrijven.

Op basis van wat we in de vorige paragrafen geleerd hebben, kunnen we vermoeden dat deze verdeling niet beïnvloed wordt door de beginwaarden, maar uitsluitend door de overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers. Als je wat experimenteert met het rekenblad, wordt dat vermoeden versterkt.

> *Samenvatting*
>
> We stellen vast dat de procentuele verdeling van de bevolking over de leeftijdsklassen op de lange termijn bij benadering constant blijft. Deze lange-termijn-leeftijdsverdeling of stabiele leeftijdsverdeling lijkt alleen bepaald te worden door de overlevingskansen en de vruchtbaarheidscijfers en niet door de beginpopulatie.

9. Wiskundig bepalen van de stabiele leeftijdsverdeling

We hebben in de vorige paragrafen vastgesteld dat op de lange termijn (dus voor n relatief groot) $X_{n+1} \approx 0.84 \cdot X_n$, of anders uitgedrukt: $L \cdot X_n \approx 0.84 \cdot X_n$. Dit wil zeggen: vermenigvuldigen met de matrix L komt bij benadering op hetzelfde neer als vermenigvuldigen met het getal 0.84. Bovendien weten we dat de benadering steeds beter wordt naarmate n groter wordt. Daarom vragen we ons nu af of er een kolommatrix X bestaat waarvoor de gelijkheid exact opgaat. Dat onderzoeken we door het stelsel $L \cdot X = 0.84 \cdot X$ op te lossen. Voluit geschreven, is dit stelsel:

$$\begin{cases} 0.43x_1 + 0.34x_2 + 0.01x_3 = 0.84x_1 \\ 0.98x_1 = 0.84x_2 \\ 0.96x_2 = 0.84x_3 \\ 0.83x_3 = 0.84x_4 \\ 0.30x_4 = 0.84x_5 \end{cases}.$$

Het is niet moeilijk om het met de hand op te lossen. De onderste vier vergelijkingen laten ons toe om alle onbekenden uit te drukken in functie van x_1:

$$x_2 = \frac{0.98}{0.84}x_1$$

$$x_3 = \frac{0.96}{0.84}x_2 = \frac{0.98 \cdot 0.96}{0.84^2}x_1$$

$$x_4 = \frac{0.83}{0.84}x_3 = \frac{0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.83}{0.84^3}x_1$$

$$x_5 = \frac{0.30}{0.84}x_4 = \frac{0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.83 \cdot 0.30}{0.84^4}x_1$$

Als we deze uitdrukkingen invullen in de eerste vergelijking wordt deze triviaal:

$$0.43 \cdot x_1 + 0.34 \cdot \frac{0.98}{0.84} x_1 + 0.01 \cdot \frac{0.98 \cdot 0.96}{0.84^2} x_1 = \frac{0.43 \cdot 0.84^2 + 0.34 \cdot 0.98 \cdot 0.84 + 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.96}{0.84^2} x_1 = 0.84 x_1 \overset{!}{=} 0.84 x_1 .$$

Het stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen. Er zijn dus oneindig veel matrices waarvoor $L \cdot X = 0.84 \cdot X$.

De oplossing waarvoor de som van de componenten 1 is, is

$$x_1 = 0.1891\ldots,\ x_2 = 0.2206\ldots,\ x_3 = 0.2521\ldots,\ x_4 = 0.2491\ldots \text{ en } x_5 = 0.0889\ldots .$$

Dit stemt overeen met de percentages van de stabiele leeftijdsverdeling!

Dit geeft ons een elegante manier om de stabiele leeftijdsverdeling te vinden. Meteen wordt ook ons vermoeden bevestigd dat de stabiele leeftijdsverdeling volledig bepaald wordt door de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen. We hebben bij onze berekening immers alleen gebruik gemaakt van de matrix L!

De werkwijze die we hier gevonden hebben, kunnen we algemeen gebruiken wanneer we de evolutie van een bevolking beschrijven met een Lesliemodel, op voorwaarde dat we de lange-termijn-groeifactor kennen. (De werkwijze kan zelfs nog verder veralgemeend worden tot situaties die beschreven worden met behulp van een overgangsmatrix (als deze overgangsmatrix aan bepaalde voorwaarden voldoet)).

22. De evolutie van een bevolking wordt beschreven door een Lesliemodel met Lesliematrix

$$L = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Met hoeveel leeftijdsklassen wordt hier gerekend?

b. Wat is de betekenis van de getallen in de matrix?

Er wordt gegeven dat de lange-termijn-groeifactor 1.2 is.

c. Bereken de stabiele leeftijdsverdeling met de werkwijze uit deze paragraaf.

d. Controleer je antwoord op vraag c en het gegeven i.v.m. de lange-termijn-groeifactor m.b.v. berekeningen in de stijl van de voorgaande paragrafen.

Samenvatting

Als we de lange-termijn-groeifactor kennen, kan de stabiele leeftijdsverdeling berekend worden m.b.v. de Lesliematrix alleen en zonder daadwerkelijk de evolutie van de bevolking op lange termijn uit te rekenen. Meer bepaald: als L de Lesliematrix is die de evolutie van een populatie beschrijft en λ de lange-termijn-termijn-groeifactor is, dan kan de stabiele leeftijdsverdeling als volgt bepaald worden:

- los het stelsel $LX = \lambda X$ op
- bepaal de oplossing van het stelsel waarvoor de som van de componenten gelijk is aan 1.

10. Wiskundig bepalen van de lange-termijn-groeifactor

In de vorige paragraaf zijn we er in geslaagd om de stabiele leeftijdsverdeling te bepalen zonder te steunen op de lange-termijn-evolutie van de bevolking. Dat was eleganter en het vormde ook de bevestiging voor het vermoeden dat de stabiele leeftijdsverdeling bepaald wordt door de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen alleen. Nu zullen we zien dat ook de lange-termijn-groeifactor op een dergelijke manier berekend kan worden.

In de vorige paragraaf hebben we opgemerkt dat het stelsel $L \cdot X = 0.84 \cdot X$ oneindig veel oplossingen heeft. Eén van deze oplossingen leverde ons de stabiele leeftijdsstructuur. Dit is een cruciale eigenschap. Daaraan kunnen we de lange-termijn-groeifactor herkennen. Als we de lange-termijn-groeifactor nog niet kennen, kunnen we hem vinden door te zoeken naar een getal λ waarvoor het stelsel $L \cdot X = \lambda \cdot X$ oneindig veel oplossingen heeft. We werken dit nu verder uit.

Voluit geschreven is het stelsel

$$\begin{cases} 0.43x_1 + 0.34x_2 + 0.01x_3 = \lambda x_1 \\ 0.98x_1 = \lambda x_2 \\ 0.96x_2 = \lambda x_3 \\ 0.83x_3 = \lambda x_4 \\ 0.30x_4 = \lambda x_5 \end{cases}$$

In standaardvorm wordt dit:

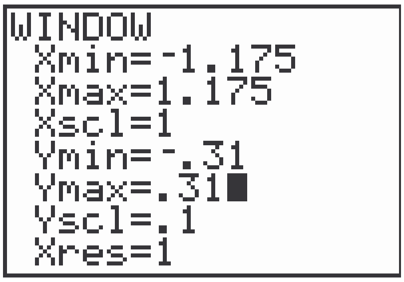
$$\begin{cases} (0.43-\lambda)x_1 + 0.34x_2 + 0.01x_3 = 0 \\ 0.98x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ 0.96x_2 - \lambda x_3 = 0 \\ 0.83x_3 - \lambda x_4 = 0 \\ 0.30x_4 - \lambda x_5 = 0 \end{cases}$$

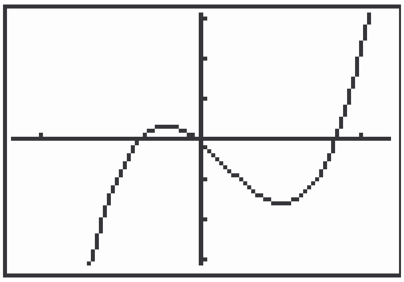
De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel ontstaat door te vertrekken van de matrix L en van de elementen op de hoofddiagonaal λ af te trekken. We kunnen datzelfde effect bereiken via een eenvoudige bewerking met matrices: vermenigvuldig de eenheidsmatrix met het getal λ en trek het resultaat af van de matrix L. Met andere woorden: de coëfficiëntenmatrix is $L - \lambda E_5$.

Ongeacht de waarde van λ heeft het stelsel altijd minstens één oplossing, namelijk de nuloplossing. Het stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen als en slechts als de determinant van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan 0. De voorwaarde voor de lange-termijn-groeifactor is dus

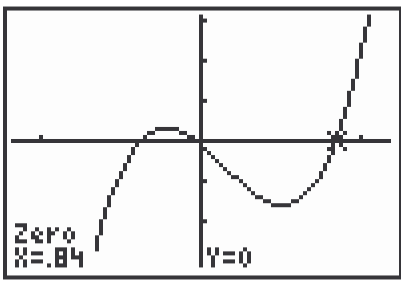
$$\det(L - \lambda E_5) = -\lambda^2(\lambda^3 - 0.43\lambda^2 - 0.3332\lambda - 0.009408) \overset{eis}{=} 0 .$$

We zien onmiddellijk dat 0 een van de oplossingen van de vergelijking is. In de context van de bevolkingsgroei heeft deze oplossing echter geen betekenis. We maken een grafiek van de tweede factor om de andere oplossingen van de vergelijking te vinden.





We zien op het zicht nog drie oplossingen: twee negatieve en één positieve. Alleen de positieve oplossing is zinvol in de context van bevolkingsgroei. Ze wordt hieronder bepaald:



23. De evolutie van een bevolking wordt beschreven wordt door een Lesliemodel met Lesliematrix

$$L = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de lange-termijn-groeifactor volgens de werkwijze van deze paragraaf.
b. Bereken de stabiele leeftijdsstructuur volgens de werkwijze van vorige paragraaf.
c. Controleer je resultaten m.b.v. berekeningen in de stijl van de voorgaande paragrafen.

Samenvatting

We kunnen de lange-termijn-groeifactor berekenen m.b.v. de Lesliematrix alleen en zonder daadwerkelijk de evolutie van de bevolking op lange termijn uit te rekenen. Meer bepaald: als L de Lesliematrix is die de evolutie van een populatie beschrijft, dan is de lange-termijn-groeifactor de (en ige) strikt positieve oplossing van de vergelijking $\det(L - \lambda E_n) = 0$ (waarbij E_n de eenheidsmatrix is met dezelfde afmetingen als de Lesliematrix).

11. Eigenwaarden en eigenvectoren

We hebben in de voorgaande paragrafen de evolutie van een bevolking gemodelleerd m.b.v. een Lesliemodel. De basis van dat model bestaat uit een matrix, de Lesliematrix. Met de evolutie van de bevolking is een lange-termijn-groeifactor en een stabiele leeftijdsverdeling verbonden. Beide kunnen bepaald worden m.b.v. de Lesliematrix alleen en worden niet beïnvloed door de beginpopulatie.

Het belang van deze begrippen is niet beperkt tot de studie van bevolkingsgroei. Ze komen in nog heel veel andere contexten naar voor en spelen ook in de zuivere wiskunde een belangrijke rol. In deze paragraaf bekijken we de abstracte formulering van deze begrippen.

Veronderstel dat A een $n \times n$-matrix is (niet noodzakelijk een Lesliematrix die de evolutie van een populatie beschrijft). Een getal λ is een *eigenwaarde* van de matrix A als en slechts als $\det(A - \lambda E_n) = 0$. Als λ een eigenwaarde is van de matrix A, dan noemen we elke kolommatrix X die niet volledig uit nullen bestaat en waarvoor $A \cdot X = \lambda \cdot X$ een *eigenvector* van de matrix A met eigenwaarde λ. De definitie van eigenwaarde garandeert precies dat er bij elke eigenwaarde ook eigenvectoren zijn.

De lange-termijn-groeifactor is dus een van de eigenwaarden van de Lesliematrix. In paragraaf 10 en 11 had de vergelijking $\det(L - \lambda E_n) = 0$ nog andere oplossingen, die geen betekenis hadden in de context van de evolutie van een bevolking. Ook deze andere oplossingen zijn eigenwaarden. De Lesliematrix die de groei van de Belgische bevolking beschrijft, heeft dus 4 eigenwaarden: 0.84, 0, $-0.029...$ en $-0.380...$. De Lesliematrix uit vraag 23 heeft er twee: 0.9 en -0.3.

De stabiele leeftijdsverdelingen zijn eigenvectoren van de Lesliematrix. De stabiele leeftijdsverdeling van de Belgische bevolking is een van de eigenvectoren van de Lesliematrix met eigenwaarde 0.84. Ook de andere oplossingen van het stelsel $L \cdot X = 0.84 \cdot X$ (behalve de nuloplossing) zijn eigenvectoren van de Lesliematrix met eigenwaarde 0.84. Daarnaast zijn er ook eigenvectoren bij de andere eigenwaarden van deze Lesliematrix, maar deze eigenvectoren hebben geen betekenis in de context van de bevolkingsgroei.

Auteur: Johan Deprez

Een eerdere versie van deze tekst is verschenen in nummer 19/1 van het tijdschrift Uitwiskeling, zie ook www.uitwiskeling.be.